



تمرینات درس ریاضیات عمومی ۱ - رشته مهندسی برق  
سری دوم: حد و پیوستگی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۹/۰۹

مدرس: حسینی

(۱) حدود زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x] + [2x] + \dots + [100x]}{x}, & \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} \\
 \text{(iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right), & \text{(iv)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right) \\
 \text{(v)} \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - 2 \cos x}, & \text{(vi)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 \sqrt{x} \ln(1 + 3x)}{(\tan^{-1} \sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt{x}} - 1)}
 \end{aligned}$$

(۲) با فرض اینکه تابع  $f$  با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

پیوسته است، مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

(۳) پیوستگی یا ناپیوستگی توابع زیر را در نقطه  $x = 0$  بررسی کنید.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}, \quad \text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}, \quad \text{(iii)} \quad f(x) = \text{sign}(x).$$

(۴) فرض کنید  $f$  تابعی پیوسته در بازه  $[0, 1]$  بوده و  $f(0) = f(1)$ .

الف) نشان دهید نقطه‌ای مانند  $a$  در بازه  $[0, \frac{1}{n}]$  وجود دارد به طوری که  $f(a) = f(a + \frac{1}{n})$ ؛  
ب) اگر  $n$  یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ باشد، نشان دهید که به ازای  $a$  ای در بازه  $[0, 1 - \frac{1}{n}]$  داریم

$$f(a) = f(a + \frac{1}{n}).$$

«موفق باشید»