

به نام خدا



تمرینات درس جبرخطی عددی- رشته ریاضیات و کاربردها
سری اول- روش های مستقیم حل دستگاه معادلات خطی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۸/۲۱

مدرس: حسینی

(۱) دستگاه معادلات خطی

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3, \\ -10x_1 + 10^5x_2 &= 10^5,\end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. جواب این دستگاه را با روش حذفی گاوس در حساب ممیز شناور چهار رقمی و با استفاده از راهکارهای زیر به دست آورید:

(الف) محورگیری جزئی؛

(ب) محورگیری جزئی مقیاس شده؛

(پ) محورگیری کامل؛

(ت) جواب دقیق دستگاه را به دست آورده و با جواب های حاصل از قسمت های (الف)-(پ) مقایسه کنید.

(۲) فرض کنید A ماتریسی ناتکین و $A^{(k)}$ ماتریس حاصل از به کارگیری روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی برای حل دستگاه $Ax = b$ در گام k ام باشد. همچنین، فرض کنید

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(k)} = (a_{rs}^{(k)}), \quad a_k = \max_{r,s} |a_{rs}^{(k)}|.$$

نشان دهید:

(الف) به ازای ماتریس دلخواه A داریم

$$a_k \leq 2^k a_0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(ب) به ازای ماتریس سه قطری A داریم

$$a_k \leq 2 a_0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(۳) ماتریس A و بردار b را به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

(الف) توضیح دهید چرا ماتریس A دارای تجزیه LU نیست؛

(ب) با استفاده از محورگیری جزئی و ماتریس جایگشت مناسب P ، تجزیه LU برای ماتریس PA بیابید؛

(پ) با استفاده از ماتریس‌های P ، L و U جواب دستگاه $Ax = b$ را به دست آورید.

(۴) تجزیه چولسکی ماتریس خیام-پاسکال مرتبه ۴، یعنی،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix},$$

را به دست آورید.

(۵) اگر $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ یک ماتریس اکیداً معین مثبت باشد، نشان دهید همه زیرماتریس‌های اصلی پیشروی مرتبه k آن ناتکین هستند. در مورد درستی یا نادرستی عکس مطلب فوق بحث کنید.

(۶) فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس معین مثبت اکید باشد. نشان دهید

$$|a_{ij}| < \frac{a_{ii} + a_{jj}}{2} \quad (\text{الف})$$

(ب) بزرگترین درایه A (از لحاظ قدرمطلق) روی قطر اصلی قرار دارد.

«موفق باشید»