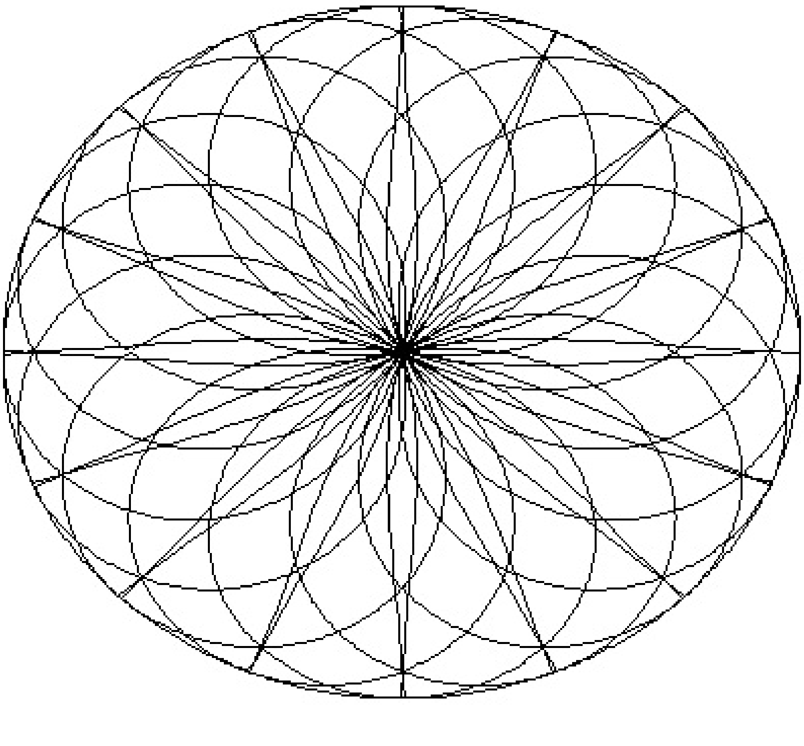
جزوه درس ریاضیات عمومی ۱

دکتر سید احمد حسینی - دانشگاه گلستان

دکتر علی عبدی - دانشگاه تبریز



فهرست مطالب

فصل ۱

اعداد مختلط

۱.۱ پیدایش اعداد مختلط

یکی از مهمترین مسایل موجود در ریاضیات و علوم مختلف، حل معادلات است که در این میان، یافتن ریشه‌های چندجمله‌ای‌های با ضرایب حقیقی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. نقص اصلی اعداد حقیقی این است که هر چندجمله‌ای روی مجموعه اعداد حقیقی دارای ریشه نیست. مهمترین و ساده‌ترین نمونه، معادله $x^2 + 1 = 0$ است که در اعداد حقیقی جواب ندارد. این نقصان، ریاضی‌دانان را به این فکر انداخت که مجموعه‌ای وسیعتر و سازگار با اعداد حقیقی بسازند به‌طوری‌که در این مجموعه جدید هر چندجمله‌ای دارای جواب باشد.

به همین منظور، عددی به‌نام i با ویژگی $i^2 + 1 = 0$ معرفی کردند. با توجه به اینکه تا مدت‌ها تعبیر ملموسی برای این عدد یافت نشده بود، این عدد را عدد موهومی نامیدند که بعدها گاوس[1] تعبیری واقعی به این عدد بخشید. با تلفیق عدد موهومی i و اعداد حقیقی مجموعه وسیعتری به‌نام مجموعه اعداد مختلط ساخته شد که نقص اعداد مختلط را برطرف ساخت.

همان‌طور که در بالا بیان شد بسیاری از مسایل که ریاضیات در آن‌ها دخیل است مستلزم حل معادلات هستند. در طول قرن‌ها دستگاه اعداد بارها وسعت یافت تا برای انواع معادلات جواب ایجاد کند. اعداد طبیعی برای جواب‌های معادلات به شکل

$$x + n = m, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

[1] C.F. Gauss

کافی نیستند. با افزودن صفر و اعداد منفی، مجموعه اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، به‌وجود می‌آید که در آن معادله حتی به ازای $n > m$ دارای جواب $x = m - n$ است (از نظر تاریخی، این توسیع از دستگاه اعداد خیلی دیرتر از بعضی توسیع‌های زیر، ظاهر شد). بعضی از معادلات به شکل $nx = m$ که در آن $m, n \in \mathbb{Z}$ ،$n \neq ۰$، را می‌توان در اعداد صحیح حل کرد. توسیع دیگر برای وارد کردن اعداد به شکل $\frac{m}{n}$ صورت گرفت و بدین ترتیب مجموعه اعداد گویا $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰ \right\}$ تولید شد. هر معادله خطی $ax = b$ دارای جواب $x = \frac{b}{a}$ در $\mathbb{Q}$ است ولی معادله درجه دوم $x^۲ = ۲$ در $\mathbb{Q}$ جواب ندارد. توسیع دیگر اعداد گویا را به اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، وسعت می‌دهد که در آن بعضی از معادلات مانند $x^۲ = ۲$ دارای جواب هستند اما معادلات درجه دو دیگر مانند $x^۲ = -۱$ حتی در اعداد حقیقی جواب ندارند. لذا فرایند توسع کامل نیست. برای حل هر معادله درجه دو باید دستگاه اعداد حقیقی را به مجموعه وسیعتری وسعت دهیم.

مفهوم اعداد حقیقی برای شمردن و اندازه‌گیری کمیت‌ها شکل گرفت و در ابتدا آنچه امروز اعداد گویای مثبت می‌نامیم، محدود بود. اما ضرورت و تجربه علمی، توسعه مفهوم عدد را به‌گونه‌ای ایجاب می‌کرد که اعداد گنگ و اعداد منفی نیز به عنوان عدد پذیرفته شدند. مجموعه همه این اعداد را امروزه مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم.

کوشش‌هایی که در قرن شانزدهم صرف حل معادلات درجه سوم شد، نشان داد که مفهوم عدد حقیقی همچنان کاستی‌هایی دارد که موجب بی نتیجه ماندن این کوشش‌ها می‌شود.

روش حل معادلات درجه دوم از دوران باستان شناخته شده بود. معادله درجه دوم

$$x^۲ + ax + b = ۰,$$

را در نظر بگیرید. با جایگزینی $t = x + \frac{b}{a}$ در معادله بالا داریم

$$t^۲ = \frac{a^۲}{۴} - b.$$

اگر $b \leq \frac{a^۲}{۴}$، معادله دارای دو جواب حقیقی است که ممکن است بر هم منطبق باشند. همچنین، اگر $b > \frac{a^۲}{۴}$، معادله دارای ریشه حقیقی نیست.

خیام موفق شد معادلات درجه سوم را به‌طورکامل به روش ترسیم هندسی حل کند.

اما در قرن شانزدهم، کاردانو[۲]، روش جبری برای حل این نوع معادلات ارائه داد. معادله درجه سوم زیر را در نظر بگیرید

$$x^۳ + ax^۲ + bx + c = ۰,$$

با استفاده از تغییر متغیر $t = x - \frac{a}{۳}$ داریم

$$t^۳ + pt + q = ۰,$$

که در آن p و q عبارت‌هایی بر حسب a، b و c هستند. با حل معادله فوق داریم

$$t = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}\left(-q + \sqrt{q^۲ + \frac{۴}{۲۷}p^۳}\right)} + \sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}\left(-q - \sqrt{q^۲ + \frac{۴}{۲۷}p^۳}\right)}$$

ظاهراً دستوری که کاردانو برای حل این نوع معادلات ارائه داد دستوری کامل است اما کمی دقت و استفاده علمی از آن دو مشکل را ایجاد می‌کند

(الف) هر معادله درجه دوم یا دارای جواب حقیقی نیست یا دو جواب حقیقی دارد که ممکن است بر هم منطبق باشند. معادلات درجه سوم ممکن است تا سه جواب حقیقی داشته باشند، اما دستور کاردانو ظاهراً فقط یک جواب بدست می‌دهد. در عمل این موضوع مشکل به‌وجود نمی‌آورد. زیرا به عنوان مثال، اگر α ریشه‌ای از معادله $t^۳ + pt + q = ۰$ باشد، می‌توان نوشت

$$t^۳ + pt + q = (t - \alpha)(t^۲ + At + B),$$

که با حل معادله درجه دوم $t^۲ + At + B = ۰$، سایر جواب‌ها، در صورت وجود بدست می‌آیند. به عنوان مثال، معادله $t^۳ - ۳t + ۲ = ۰$ را در نظر بگیرید. با استفاده از دستور کاردانو داریم

$$t = \sqrt[۳]{-۱} + \sqrt[۳]{-۱} = -۲.$$

[۲] G. Cardano

لذا می‌توان نوشت

$$t^3 - 3t + 2 = (t+2)(t-1)^2 = 0.$$

بنابراین معادله دارای ریشه مضاعف ۱ و ریشه ساده ۲− است.

(ب) مشکل جدیدتری نیز ظاهر شد که به توسعه مفهوم عدد منجر گردید و پذیرش اشیائی ریاضی به شکل $\sqrt{-1}$ را به عنوان عدد ایجاب کرد. معادله درجه سوم زیر را در نظر بگیرید

$$t^3 - 6t + 4 = (t-2)(t^2+2t-2) = 0,$$

لذا داریم

$$t = 2, -1 \pm \sqrt{3}.$$

با استفاده از دستور کاردانو داریم

$$t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4+\sqrt{-16})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-4-\sqrt{-16})},$$

ظاهر شدن $\sqrt{-16}$ در این عبارت مشکل ایجاد می‌کند. با جایگزینی $4\sqrt{-1}$ به جای $\sqrt{-16}$ در این عبارت خواهیم داشت

$$t = \sqrt[3]{-2+2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-2-2\sqrt{-1}} \tag{1.1}$$

این عبارت ظاهراً هیچ‌یک از سه جواب ذکر شده نیست. علاوه بر این، از نظر معنی مشکوک است، زیرا تاکنون برای $\sqrt{-1}$ هیچ معنایی قائل نشده‌ایم. ریاضی‌دانان قرن شانزدهم متوجه شدند که می‌توان از محاسبات صوری استفاده کرد. فرض کنید $\sqrt{-1}$ معنی داشته باشد یا دست‌کم بتوان با آن محاسبات عادی جبری را انجام داد. در این‌صورت با توجه به اتحاد

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

می‌توان نوشت

$$(1+\sqrt{-1})^3 = 1 + 3\sqrt{-1} - 3 - \sqrt{-1} = -2 + 2\sqrt{-1},$$

به‌طور مشابه داریم

$$(1-\sqrt{-1})^3 = 1 + 3\sqrt{-1} - 3 - \sqrt{-1} = -2 - 2\sqrt{-1}$$

بنابراین تساوی (۱.۱) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$t = 1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1} = 2,$$

یعنی با اینکه برای $\sqrt{-1}$ معنایی قائل نیستیم اگر عملیات جبری را چنان‌که گوئی $\sqrt{-1}$ هم عدد است انجام دهیم، جواب معادله بدست می‌آید. کاردانو در کتاب خود، مقادیری مانند $\sqrt{-1}$ را "اعداد مجازی" نامید. هرچند عدد نیستند اما رفتار جبری مشابه اعداد دارند و به کمک آن‌ها می‌توان به حقایقی درباره اعداد رسید.

طی دو تا سه قرن مفهوم $\sqrt{-1}$ و امثال آن به تدریج جای خود را در ریاضیات یافتند و تعبیر و معنای دقیقی برای آن‌ها ارائه شد. اولین افرادی که تعبیر هندسی برای $\sqrt{-1}$ ارئه کردند کاسپار وسل[۳] نروژی و ژان رابرت آرگان[۴] بودند. اما بررسی جامع و دقیق‌تری برای این‌گونه اعداد و خواص جبری آن‌ها در آثار لئونارد اویلر[۵] و کارل فردریش گاوس به کمال رسید. [۱]

۲.۱ معرفی اعداد مختلط

بحث را با تعریف علامت i به‌نام واحد موهومی با خاصیت $i^2 = -1$ شروع می‌کنیم. لذا می‌توانیم i را ریشه دوم -1 نیز بنامیم و آن‌را با $\sqrt{-1}$ نمایش دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک عدد مختلط عبارتی است به شکل $a + ib$ که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند و i واحد موهومی. اعداد زیر را می‌توان به عنوان مثال‌هایی از اعداد مختلط در نظر گرفت

$$3 + 2i, \quad \frac{7}{2} - \frac{2}{3}i, \quad i\pi, \quad -3,$$

مثال آخر نشان می‌دهد که هر عدد حقیقی را می‌توان به عنوان یک عدد مختلط در نظر گرفت.

[۳] C. Wessel

[۴] J. R. Argan

[۵] L. Euler

اغلب شایسته است یک عدد مختلط را با یک حرف نمایش دهیم. برای این منظور، معمولاً از حروف z و w استفاده می‌کنند.

تعریف ۲.۲.۱ (تساوی دو عدد مختلط)**.** فرض کنید $z = a_1 + ib_1$ و $w = a_2 + ib_2$ که در آن a_1، a_2، b_1 و b_2 اعدادی حقیقی‌اند. در این صورت $z = w$ اگر و تنها اگر $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$.

تبصره. اگر $z = x + iy$ یک عدد مختلط باشد آن‌گاه x را قسمت حقیقی z نامیده و با $Re(z)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، y را قسمت موهومی z نامیده و با $Im(z)$ نمایش می‌دهیم.

تبصره. عبارت‌هایی مانند $z_1 > 0$، $z_2 < 0$ و $z_1 < z_2$ بی معنی هستند.

نمایش تصویری اعداد مختلط

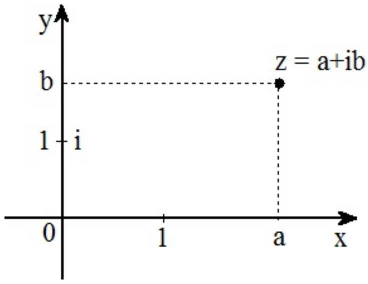
چون اعداد مختلط از جفت‌های اعداد حقیقی (قسمت‌های حقیقی و موهومی) ساخته می‌شوند، طبیعی است که اعداد مختلط را به‌طور تصویری با نقاط در یک صفحه دکارتی نمایش دهیم. نقطه به مختصات (a,b) را برای نمایش عدد مختلط $a + ib$ به‌کار می‌بریم. به‌ویژه، مبدأ مختصات نمایش عدد مختلط 0 است. نقطه $(1,0)$ نمایش عدد مختلط $1+0i$ و نقطه $(0,1)$ نمایش عدد مختلط $i = 0 + i$ است. این نمایش اعداد مختلط به عنوان نقاط در یک صفحه، نمودار آرگان نام دارد.
چون هر عدد مختلط با نقطه یکتایی در صفحه نمایش داده می‌شود، مجموعه اعداد مختلط را اغلب صفحه مختلط می‌نامند و از نماد $\mathbb{C}$ برای نمایش مجموعه تمام اعداد مختلط و به‌طور معادل صفحه مختلط

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

استفاده می‌شود.
نقاط روی محور x از صفحه مختلط نظیر اعداد حقیقی‌اند. لذا محور x را محور حقیقی می‌نامند. به‌طور مشابه، نقاط روی محور y نظیر اعداد موهومی محض هستند. ازاین‌رو، محور y، را محور موهومی می‌نامند (شکل ۱.۱ را ببینید).

تبصره. اگر $i = \sqrt{-1}$ آن‌گاه

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1,$$



شکل ۱.۱

و در حالت کلی داریم

$$i^{۴k} = ۱, \qquad i^{۴k+۱} = i, \qquad i^{۴k+۲} = -۱, \qquad i^{۴k+۳} = -i.$$

تعریف ۳.۲.۱ (اندازه اعداد مختلط)**.** اندازه (مدول، هنگ) عدد مختلط $z = a + ib$ را با $|z|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$|z| = \sqrt{a^۲ + b^۲}.$$

از نظر هندسی $|z|$، فاصله نقطه z از مبدأ مختصات در صفحه مختلط را نشان می‌دهد. لذا نامساوی $|z_۲| < |z_۱|$ بدین معنی است که فاصله نقطه $z_۱$ از مبدأ بیشتر از فاصله نقطه $z_۲$ از مبدأ است.

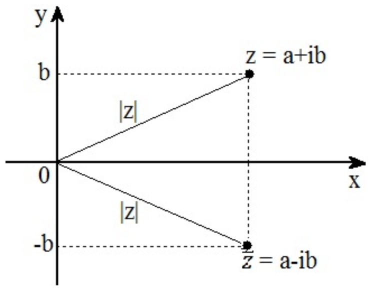
تبصره. تساوی $|z_۲| = |z_۱|$ رابطه برابری $z_۱ = z_۲$ را نتیجه نمی‌دهد.

تعریف ۴.۲.۱ (مزدوج اعداد مختلط)**.** مزدوج عدد مختلط $z = a + ib$ را با $\overline{z}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\overline{z} = a - ib.$$

با توجه به نمایش ترسیمی اعداد مختلط $\overline{z}$ قرینه z نسبت به محور xها است.

اعداد مختلط را می‌توان مانند اعداد حقیقی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد. دو عدد مختلط با هم جمع یا تفریق می‌شوند گویی که بردارهایی دوبعدی‌اند که مولفه‌هایشان قسمت‌های حقیقی و موهومی آن‌هاست.



شکل ۲.۱

جمع دو عدد مختلط

فرض کنید $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ دو عدد مختلط باشند. در این صورت، جمع دو عدد به شکل زیر تعریف می‌شود

$$z_۱ \pm z_۲ = (x_۱ + iy_۱) \pm (x_۲ + iy_۲) = (x_۱ \pm x_۲) + i(y_۱ \pm y_۲).$$

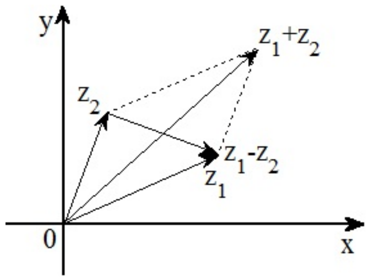
تبصره. جمع اعداد مختلط از همان قواعد جمع اعداد حقیقی تبعیت می‌کند. اگر $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ سه عدد مختلط باشند، روابط زیر به‌آسانی قابل تحقیق است

(الف) $w_۱ + w_۲ = w_۲ + w_۱$؛ (خاصیت جابجایی)

(ب) $(w_۱ + w_۲) + w_۳ = w_۱ + (w_۲ + w_۳)$؛ (خاصیت شرکت‌پذیری)

(پ) $|w_۱ + w_۲| \le |w_۱| + |w_۲|$. (نامساوی مثلثی)

تبصره. اگر $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ دو عدد مختلط باشند آن‌گاه $|z_۱ - z_۲|$ فاصله بین دو نقطه $z_۱$ و $z_۲$ در صفحه مختلط است (شکل ۳.۱ را ببینید).



شکل ۳.۱

ضرب و تقسیم دو عدد مختلط

فرض کنید $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ دو عدد مختلط باشند. در این صورت، ضرب دو عدد با ضرب صوری عبارات دوجمله‌ای و جایگزینی i^2 با -1 انجام می‌شود. لذا داریم

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

برای تقسیم دو عدد مختلط نیز به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2 + y^2}$$

تبصره. ضرب اعداد مختلط با ضرب اعداد حقیقی خواص مشترک زیادی دارد. به‌ویژه، اگر w_1، w_2 و w_3 سه عدد مختلط باشند آن‌گاه داریم

(الف) $w_1 w_2 = w_2 w_1$؛

(ب) $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3)$؛

(پ) $w_1 (w_2 + w_3) = w_1 w_2 + w_1 w_3$.

ویژگی‌های اعداد مختلط

فرض کنید z، z_1 و z_2 سه عدد مختلط باشند. در این صورت، داریم

۱) $\overline{\overline{z}} = z$، $z\overline{z} = |z|^2$؛

۲) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$؛

۳) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$، $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$؛

۴) $z \in \mathbb{R}$ $\texttt{iff}$ $z = \overline{z}$؛

۵) $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$، $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$؛

۶) $|z| = |\overline{z}|$، $|z| \geq 0$؛

۷) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$، $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$؛

۸) $|Re(z)| \leq |z|$، $|Im(z)| \leq |z|$؛

۹) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

مثال ۱.۲.۱. اگر $z_1 = 1 - i$ و $z_2 = -2 + 4i$، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{|z_1 + z_2 + 1|}{|z_1 - z_2 + i|}$$

مثال ۲.۲.۱. حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{\sqrt{1 + z^2} + iz}{z - i\sqrt{1 + z^2}}$$

مثال ۳.۲.۱. عبارات زیر را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید.

$$\text{(i)}\ \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}, \qquad \text{(ii)}\ \frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$$

مثال ۴.۲.۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق کنند

$$\text{(i)}\ |z + 2i| + |z - 2i| = 6, \qquad \text{(ii)}\ \left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| \leq 2,$$

$$\text{(iii)}\ Re\left(\frac{z - i}{z + i}\right) < 1, \qquad \text{(iv)}\ Im\left(\frac{z - i}{z + i}\right) < a$$

مثال ۵.۲.۱. فرض کنید سه نقطه z_1، z_2 و z_3 از صفحه اعداد مختلط در رابطه $\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$ صدق کنند که در آن α، β و γ اعداد حقیقی با شرط $\alpha + \beta + \gamma = 0$ باشند که همزمان صفر نیستند (حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است). نشان دهید این سه نقطه بر یک استقامتند (در یک راستا قرار دارند).

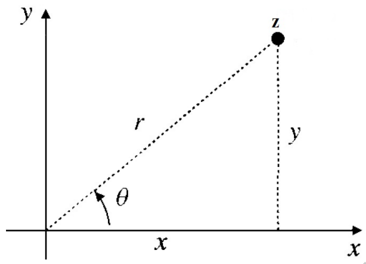
مثال ۶.۲.۱. با استفاده از ویژگی‌های اعداد مختلط ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، مجموع مربعات قطرها مساوی دو برابر مجموع مربعات طول اضلاع است. یعنی،

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

مثال ۷.۲.۱. (الف) اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد. نشان دهید $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$. (ب) اگر z_0 ریشه $p(z)$ باشد آن‌گاه $\overline{z_0}$ نیز ریشه $p(z)$ است.

۳.۱ نمایش قطبی اعداد مختلط

با توجه به تناظر یک به یک بین اعداد مختلط و نقاط صفحه، هر عدد مختلط $z = x + iy$ یک نقطه به مختصات (x, y) را در مختصات دکارتی مشخص می‌کند و برعکس. حال فرض کنید z یک عدد مختلط ناصفر باشد. زاویه‌ای که oz با قسمت مثبت محور xها می‌سازد را با θ و طول oz را با r نمایش دهید (شکل ۴.۱ را ببینید).



شکل ۴.۱

در این صورت داریم

$$r = |z| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}},$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

از طرفی داریم

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta,$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta.$$

لذا عدد مختلط z را می‌توان به شکل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ یا به اختصار $z = rCiS\theta$ نوشت. این طرز نمایش را نمایش قطبی یا مثلثاتی می‌نامند. زاویه θ را شناسه (آرگومان) عدد z می‌نامند. اگر θ یک آرگومان z باشد آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح k، $\theta + ۲k\pi$ نیز یک آرگومان z است و هر آرگومان دیگر z نیز به این شکل است. مجموعه همه آرگومان‌های z را با نماد $arg(z)$ نشان می‌دهند. لذا

$$arg(z) = \{\theta + ۲k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

همچنین آرگومانی از z را که در بازه $(-\pi, \pi]$ ($[0, 2\pi)$) قرار گیرد را آرگومان اصلی z نامیده و با $Arg(z)$ نمایش می‌دهند.

تبصره. برای $z = 0$ هر زاویه‌ای را می‌توان به عنوان آرگومان در نظر گرفت.

تبصره. اگر $z = x+iy$ آن‌گاه محاسبه آرگومان با استفاده از رابطه $Arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ صحیح نیست.

مثال ۱.۳.۱. شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید.

$$\text{(i) } z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i, \qquad \text{(ii) } z = -2 - 2\sqrt{3}i, \qquad \text{(iii) } z = \frac{1-i}{1+i},$$
$$\text{(iv) } z = 1 - i\sqrt{3}, \qquad \text{(v) } z = 5i, \qquad \text{(vi) } z = -2i$$

تساوی دو عدد مختلط در نمایش قطبی

فرض کنید $z_1 = r_1 CiS\theta_1$ و $z_2 = r_2 CiS\theta_2$. در این صورت

$$z_1 = z_2 \quad \texttt{iff} \quad r_1 = r_2,\ \ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

ضرب دو عدد مختلط در نمایش قطبی

فرض کنید $z_1 = r_1 CiS\theta_1$ و $z_2 = r_2 CiS\theta_2$. در این صورت

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 CiS(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$Arg(z_1 z_2) \equiv Arg(z_1) + Arg(z_2) \pmod{2\pi},$$

به عبارت دیگر، مجموعه $arg(z_1 z_2)$ از همه اعداد $\theta_1 + \theta_2$ تشکیل شده است که θ_1 متعلق به مجموعه $arg(z_1)$ و θ_2 متعلق به $arg(z_2)$ است.

تبصره. در حالت کلی داریم

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n CiS(\theta_1 + \theta_2 + \ldots \theta_n).$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} &|z_1 z_2 \ldots z_n| = r_1 r_2 \ldots r_n, \\ &Arg(z_1 z_2 \ldots z_n) \equiv Arg(z_1) + Arg(z_2) + \ldots Arg(z_n) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

تبصره. ضرب یک عدد مختلط در i تعبیر هندسی ساده‌ای در نمودار آرگان دارد. چون $|i| = 1$ و $Arg(i) = \frac{\pi}{2}$، ضرب $w = a + ib$ در i اندازه w را تغییر نداده ولی شناسه‌اش را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ افزایش می‌دهد. لذا ضرب w در i، بردار مکان w را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخاند.

قضیه ۱.۳.۱ (قضیه موآور[۶]). به ازای هر عدد صحیح n داریم

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

[۶] A. Moivre

تبصره. فرض کنید $z_۱ = r_۱ CiS\theta_۱$ و $z_۲ = r_۲ CiS\theta_۲$. در این صورت

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲} CiS(\theta_۱ - \theta_۲)$$

مثال ۲.۳.۱. با استفاده از فرمول موآور $\sin ۳\theta$ و $\cos ۳\theta$ را بر حسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بدست آورید.

مثال ۳.۳.۱. فرض کنید $z_۱ = \cos\left(\frac{\pi}{۵}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۵}\right)$ و $z_۲ = \cos\left(\frac{\pi}{۵}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{۵}\right)$. مقدار $\frac{z_۱^۴}{z_۲}$ را بدست آورید.

مثال ۴.۳.۱. فرض کنید $z + \frac{۱}{z} = ۲\cos\theta$. مطلوبست محاسبه $z^n + \frac{۱}{z^n}$.

ریشه اعداد مختلط

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت، دو عدد حقیقی متمایز است که مجذورشان a است. این اعداد را معمولاً با

$$\begin{aligned} &\sqrt{a} \quad (\text{ریشه دوم مثبت } a), \\ &-\sqrt{a} \quad (\text{ریشه دوم منفی } a), \end{aligned}$$

نشان می‌دهند. هر عدد مختلط ناصفر $z = x + iy$ (که $x^۲ + y^۲ > ۰$) نیز دارای دو ریشه دوم است. هرگاه $w_۱$ یک عدد مختلط باشد به‌طوری‌که $z = w_۱^۲$ آن‌گاه $w_۲ = -w_۱$.
می‌خواهیم یکی از ریشه‌ها را متمایز کنیم و آن‌را $\sqrt{z}$ بنامیم.
فرض کنید نمایش قطبی عدد مختلط z به صورت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

باشد که در آن $r = |z|$ و $\theta = Arg(z)$ ($\theta \in (-\pi, \pi]$). در این صورت

$$w = \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{۲} + i\sin\frac{\theta}{۲}),$$

به‌وضوح در $z = w^۲$ صدق می‌کند. w را ریشه دوم اصلی z نامیده و با $\sqrt{z}$ نمایش می‌دهیم.
لذا دو ریشه معادله $z = w^۲$ عبانتد از $\sqrt{z}$ و $-\sqrt{z}$.
ملاحظه می‌کنیم قسمت حقیقی $\sqrt{z}$ همواره نامنفی است. همچنین در این بازه $\sin\frac{\theta}{۲} = ۰$ اگر $\theta = ۰$، که در این حالت $\sqrt{z}$ حقیقی و مثبت است.

$$\begin{aligned} &\sqrt{۴} = \sqrt{۴(\cos ۰ + i\sin ۰)} = ۲, \\ &\sqrt{i} = \sqrt{۱(\cos\frac{\pi}{۲} + i\sin\frac{\pi}{۲})} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}}i, \\ &\sqrt{-۴i} = \sqrt{۴\left(\cos\frac{-\pi}{۲} + i\sin\frac{-\pi}{۲}\right)} = \sqrt{۲} - \sqrt{۲}i, \\ &\sqrt{-\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i} = \sqrt{\cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳}} = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i \end{aligned}$$

فرض کنید z یک عدد مختلط ناصفر و n یک عدد طبیعی باشد. w را ریشه nام z می‌نامند هرگاه $z = w^n$. برخلاف میدان اعداد حقیقی که در آن بعضی از اعداد به ازای بعضی از nها ریشه nام ندارند (به عنوان مثال، اعداد منفی در میدان اعداد حقیقی ریشه دوم ندارند) در میدان اعداد مختلط با توجه به قضیه اساسی جبر، عدد مختلط ناصفر z دارای ریشه nام و به‌طور دقیق‌تر n تا ریشه nام است. لذا این رابطه چند مقداری است بر خلاف اعداد حقیقی که در آن تابع فقط یک مقدار اختیار می‌کند.
برای یافتن ریشه nام یک عدد مختلط بهتر است از نمایش قطبی اعداد مختلط استفاده کنیم. بدین منظور، فرض کنید $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ و $w = R(\cos\phi + i\sin\phi)$ یک ریشه nام z باشد. بنابراین $z = w^n$ و درنتیجه داریم

$$(R(\cos\phi + i\sin\phi))^n = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$R^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

لذا

$$R^n = r \Rightarrow R = \sqrt[n]{r},$$
$$n\phi = ۲k\pi + \theta \Rightarrow \phi = \frac{۲k\pi + \theta}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

این مقادیر ϕ به ازای $k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$ (یا n مقدار متوالی k)، n زاویه متمایز تعریف می‌کنند که مشخص کننده n عدد مختلط متمایز هستند. وقتی k مقادیر n، $n+۱$،... یا مقادیر ۱−، ۲−،... را اختیار می‌کند زوایای یکسانی بارها و بارها هر بار با اختلاف اندازه ۲π تکرار می‌شوند (به عنوان مثال، $k = n$ مقدار $\frac{۲k\pi}{n} = ۲\pi$ را نتیجه می‌دهد که متناظر با $k = ۰$ است). لذا به ازای $z \neq ۰$، $\sqrt[n]{z}$ دقیقاً دارای n مقدار متمایز

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{۲k\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{۲k\pi + \theta}{n}\right)\right), \quad k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$$

است.

تبصره.

(الف) $\sqrt[۳]{۸} \neq \sqrt{۴}$ یا $\sqrt[۵]{۳۲} \neq \sqrt[۳]{۸}$؛

(ب) $\sqrt{z_۱ z_۲} = \sqrt{z_۱}\sqrt{z_۲}$.

تبصره. هرگاه z یک عدد مختلط ناصفر و θ شناسه اصلی آن باشد آن‌گاه عدد

$$w_{۱} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right),$$

را ریشه nام اصلی z می‌نامند.

تبصره. از لحاظ هندسی تمامی ریشه‌های nام عدد مختلط ناصفر z، رأس‌های یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع $|z|^{\frac{۱}{n}}$ هستند.

مثال ۵.۳.۱. ریشه‌های سوم عدد $z = ۱ - \sqrt{۳}i$ و ریشه‌های چهارم عدد ۱۶− را بدست آورید.

مثال ۶.۳.۱. ریشه‌های nام عدد ۱ را بدست آورید.

مثال ۷.۳.۱. نشان دهید مجموع n $(n \geq ۲)$ ریشه nام هر عدد مختلط ناصفر z برابر صفر است.

مثال ۸.۳.۱. معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } z^{۴} + ۱ - i\sqrt{۳} = ۰,\\
&\text{(ii) } z^{۵} + a^{۵} = ۰, \quad a \in \mathbb{R}^{+},\\
&\text{(iii) } az^{۲} + bz + c = ۰, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq ۰,\\
&\text{(iv) } z^{۶} + ۲z^{۳} + ۲ = ۰,\\
&\text{(v) } z^{۲} - (۵ + i)z + ۸ + i = ۰
\end{aligned}$$

مثال ۹.۳.۱. فرض کنید $A_{۰}$، $A_{۱}$، …، $A_{n-۱}$ $(n \geq ۳)$ رأس‌های یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع واحد باشند. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی این دایره باشد، با استفاده از مفهوم اعداد مختلط ثابت کنید

$$|PA_{۰}|^{۲} + |PA_{۱}|^{۲} + \ldots + |PA_{n-۱}|^{۲}$$

مقداری ثابت، یعنی مستقل از P، است (منظور از $|PA_j|$ طول وتر PA_j است.)

۴.۱ بحثی مختصر در مورد توابع مختلط

فرض کنید x و y متغیرهای حقیقی باشند. در این صورت، $z = x + iy$ را متغیر مختلط می‌نامند. اگر A زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد آن‌گاه $f : A \to \mathbb{C}$ با حوزه تعریف A و حوزه مقادیر مختلط در $\mathbb{C}$ را یک تابع مختلط می‌نامند. اگر مقدار متناظر به عدد مختلط z را w بنامیم، می‌توان f را به صورت $w = f(z)$ نمایش داد. مجموعه اعدادی مانند w در تابع f را حوزه مقادیر f می‌نامند.

تابع f را یک مقداری می‌نامند هرگاه به ازای هر z در A یک و فقط یک مقدار w حاصل شود. در غیر این صورت، تابع چند مقداری است.

$$f(z) = ۳z^۲ - iz + ۲ \qquad \text{(تابع مختلط از متغیر مختلط)}$$
$$f(z) = xi + ۲y = g(x, y) \qquad \text{(تابع مختلط از متغیر حقیقی)}$$
$$h(x, y) = |z + ۱| + |z| + ۵ \qquad \text{(تابع حقیقی از متغیر مختلط)}$$
$$\phi(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۱ \qquad \text{(تابع حقیقی از متغیر حقیقی)}$$

توابع متعالی مقدماتی

توابعی را که فقط با عملیات جبری یعنی چهار عمل اصلی و استخراج ریشه از متغیر قابل ساختن نباشد، متعالی می‌نامند. توابع مثلثاتی، لگاریتمی، نمایی و هذلولوی متعالی‌اند.

تابع نمایی مختلط

اگر $z = x + iy$ آن‌گاه تابع نمایی e^z به صورت زیر تعریف می‌شود

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$$

به‌وضوح $|e^z| = e^x$ و آرگومان e^z نیز برابر y است.

تبصره (خواص تابع نمایی)**.**

(الف) $e^{z_۱+z_۲} = e^{z_۱}e^{z_۲}$؛

(ب) $e^{z_۱-z_۲} = \dfrac{e^{z_۱}}{e^{z_۲}}$؛

(پ) $(e^z)^m = e^{mz}$؛

(ت) $e^{iy}=\cos y+i\sin y$؛ (فرمول اویلر)

(ث) $e^{z\pm ۲k\pi i}=e^z e^{\pm ۲k\pi i}=e^z$؛

(ج) e^z تمامی مقادیر خود را در نوار افقی به عرض ۲π اختیار می‌کند. برد e^z تمام صفحه به‌استثنای مبدأ مختصات است.

مثال ۱.۴.۱. تمامی جواب‌های معادله $e^z=۳+۴i$ را بدست آورید.

توابع مثلثاتی مختلط

با توجه به فرمول اویلر داریم

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\Rightarrow \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{۲},$$
$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x\Rightarrow \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{۲i}$$

با توجه به روابط فوق توابع مختلط $\sin z$ و $\cos z$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲},$$
$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}$$

همچنین تابع مختلط $\tan z$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},$$

تبصره.

(الف) $\sin^۲ z+\cos^۲ z=۱$؛

(ب) $\cos(z_۱\pm z_۲)=\cos z_۱\cos z_۲\mp\sin z_۱\sin z_۲$؛

(پ) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$؛

(ت) $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$؛

(ث) $\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$؛

(ج) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$؛

(ح) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.

۵.۱ مسایل

۱. مقادیر x و y را از روابط زیر بدست آورید

$$\text{(i) } 3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i,$$
$$\text{(ii) } x + iy = |x + iy|,$$
$$\text{(iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = x + iy$$

۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق کنند

$$\text{(i) } z(\overline{z} + 2) = 3, \qquad \text{(ii) } |z - 3| - |z + 3| = 4, \qquad \text{(iii) } z^4 = \overline{z}^2$$

۳. فرض کنید به ازای عدد غیرحقیقی z مقدار $z + \frac{1}{z}$ یک عدد حقیقی باشد. مکان z را تعیین کنید.

۴. فرض کنید z_1، z_2 و z_3 سه عدد مختلط ناصفر باشند به‌طوری‌که

$$\text{(i) } z_1 + z_2 + z_3 = 0, \qquad \text{(ii) } |z_1| = |z_2| = |z_3|,$$

ثابت کنید

$$\text{(الف) } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0, \qquad \text{(ب) } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

۵. مقدار عبارات زیر را بدست آورید.

$$\text{(i) } \frac{(1 + i\sqrt{3})^8}{2^7(-1 + i\sqrt{3})}, \qquad \text{(ii) } (-1 + i\sqrt{3})^{60}, \qquad \text{(iii) } \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{40}$$

۶. فرض کنید $1 + i$ ریشه معادله $z^5 + az^3 + b = 0$ باشد. مطلوبست محاسبه ضرایب a و b.

۷. معادلات زیر را حل کنید

$$\begin{aligned}
&(\text{i})\ z^{۲} + (۲i - ۳)z + ۵ - i = ۰,\\
&(\text{ii})\ ۱ + z + z^{۲} + z^{۳} + z^{۴} = ۰,\\
&(\text{iii})\ (x+i)^n - (x-i)^n = ۰, \quad x \in \mathbb{R},\\
&(\text{iv})\ \sin z = \sqrt{۲}.
\end{aligned}$$

۸. اگر اعداد مختلط $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ رأس‌های یک مثلث متساوی الاضلاع باشند، ثابت کنید

$$z_۱^۲ + z_۲^۲ + z_۳^۲ = z_۱z_۲ + z_۲z_۳ + z_۳z_۱.$$

اگر مثلث متساوی الاضلاع نباشد آیا رابطه فوق برقرار است؟

۹. (الف) فرض کنید $z_۱$، $z_۲$، ...، $z_{۱۷}$ ریشه‌های متمایز معادله $z^{۱۷} - ۱ = ۰$ باشند. نشان دهید

$$z_۱ + z_۲ + \ldots + z_{۱۷} = ۰$$

(ب) اگر $w \neq ۱$ یکی از ریشه‌های معادله فوق و k $(۱ \leq k \leq ۱۶)$ عددی صحیح باشد، نشان دهید

$$۱ + w^k + w^{۲k} + \ldots + w^{۱۶k} = ۰$$

۱۰. درستی تساوی زیر را نشان دهید

$$\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{۲\pi}{m}\right)\cdots\sin\left(\frac{(m-۱)\pi}{m}\right) = \frac{m}{۲^{m-۱}}, \quad m = ۲, ۳, \ldots$$

فصل ۲

حد و پیوستگی

۱.۲ مقدمه

اساساً، حسابان برای توصیف نحوه تغییر کمیت‌ها به‌وجود آمد. به‌طور کلی، حسابان دارای دو رویکرد اساسی است که عکس یکدیگر هستند:

- مشتق‌گیری، برای یافتن نرخ تغییر یک تابع داده شده؛ و
- انتگرال‌گیری، برای یافتن یک تابع با یک نرخ تغییر داده شده.

هر دوی این رویکردها روی مفهوم اساسی **حد** یک تابع پایه‌ریزی شده‌اند. در این فصل، به مفهوم حد یک تابع و روش‌های محاسبه آن و در ادامه به بحث درباره پیوستگی یک تابع پرداخته خواهد شد.

۲.۲ حد تابع

۱.۲.۲ مفهوم حد

تعریف غیر صوری حد

اگر $f(x)$ به ازای هر x در مجاورت a، جز احتمالاً در خود a، تعریف شده باشد و بتوان اطمینان یافت که با اختیار x به قدر کافی نزدیک به a، $f(x)$ هر قدر بخواهیم به L نزدیک

باشد، گوییم وقتی x نزدیک a می‌شود، تابع $f(x)$ به حد L نزدیک می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

این تعریف غیر صوری است، چرا که عباراتی چون «به قدر کافی نزدیک» و «هر قدر بخواهیم نزدیک» نادقیق‌اند و معنی آن‌ها تابع زمینه کار است. به عنوان مثال، برای یک تولید کننده ماشین، یک پیستون «به قدر کافی نزدیک» ممکن است به معنی کمتر از چند هزارم اینچ باشد در حالی که برای یک ستاره شناس که فواصل کهکشان‌ها را مطالعه می‌کند، «به قدر کافی نزدیک» ممکن است به معنی کمتر از چند هزار سال نوری باشد. ولی باید تعریف آن‌قدر دقیق باشد که با آن بتوان حدود توابع مشخص را تشخیص داد و محاسبه کرد.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $a, r \in \mathbb{R}$ و $r > 0$. یک همسایگی به مرکز a و شعاع r را با نماد $N_r(a)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} N_r(a) &= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a-r < x < a+r\} \\ &= (a-r, a+r). \end{aligned}$$

اگر از همسایگی $N_r(a)$ نقطه a حذف شود، مجموعه حاصل را همسایگی محذوف a نامیده و با نماد $N_r^*(a)$ نمایش می‌دهیم. لذا

$$\begin{aligned} N_r^*(a) &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < r\} \\ &= (a-r, a+r)\backslash a. \end{aligned}$$

یک همسایگی راست به مرکز a و شعاع r را با نماد $N_r(a^+)$ نشان داده و آن عبارت است از بازه $(a, a+r)$. به همین ترتیب همسایگی چپ از a و شعاع r را با نماد $N_r(a^-)$ نشان داده و آن را بازه $(a-r, a)$ تعریف می‌کنند.
هر بازه به شکل $(r, +\infty)$ را یک همسایگی از $+\infty$ و هر بازه به شکل $(-\infty, r)$ را یک همسایگی از $-\infty$ می‌نامند.

تبصره. در صفحه $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یک همسایگی به مرکز یک نقطه و شعاع r عبارت است از درون یک دایره به مرکز همان نقطه و شعاع r. به همین ترتیب در فضای $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یک همسایگی به مرکز یک نقطه و شعاع r عبارت است از درون یک کره به مرکز همان

نقطه و شعاع r.

تعریف صوری حد

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده باشد. گوییم وقتی x به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به حد L نزدیک می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

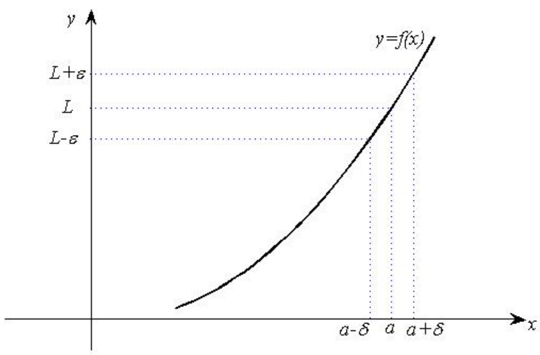
هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

به ازای هر عدد $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $0 < |x-a| < \delta$ ایجاب کند که $|f(x) - L| < \varepsilon$؛ یا به زبان ریاضی، هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x\ \left(x \in N^*_\delta(a) \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)\right).$$

به عبارت دیگر، $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ هرگاه به ازای هر همسایگی از L مانند $N_\varepsilon(L)$، یک همسایگی محذوف از a مانند $N^*_\delta(a)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(N^*_\delta(a)) \subseteq N_\varepsilon(L)$.

تبصره. توجه شود که هرگاه نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به ازای برقراری $|x - a| < \delta$ برقرار باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد مثبت کوچکتر از δ نیز برقرار خواهد بود. به‌ویژه، δ تابع ε نیست (اگرچه وابسته به آن است)، زیرا δ به‌طور یکتا به‌وسیله ε به‌دست نمی‌آید (هر δ کوچکتر نیز قابل استفاده است). شکل ۱.۲ بزرگترین مقدار برای δ را که تعریف



شکل ۱.۲

حد برقرار باشد، نشان می‌دهد و با انتخاب هر δای کوچکتر از آن نیز تعریف حد همچنان برقرار خواهد بود.

تبصره. تعریف حد طرز یافتن حد یک تابع را بیان نمی‌کند ولی با استفاده از آن می‌توان تحقیق در اینکه حدی درست است را انجام داد.

مثال ۱.۲.۲. تحقیق کنید که: (الف) $\lim\limits_{x\to a} x = a$؛ (ب) $\lim\limits_{x\to a} k = k$ که k عددی ثابت است.

مثال ۲.۲.۲. نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۲} x^{۲} = ۴$.

مثال ۳.۲.۲. در تعریف حد برای $\lim\limits_{x\to ۳/۲} \left(۵x + \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor\right) = ۱۷$ ، بیشترین مقدار δ چقدر است؟

۲.۲.۲ حد چپ و راست

فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد. گوییم حد راست f در نقطه a برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

هرگاه

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x\ \left(x \in N^*_\delta(a^+) \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)\right).$$

به همین ترتیب، اگر f در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، گوییم حد چپ تابع f در نقطه a برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

هرگاه

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x\ \left(x \in N^*_\delta(a^-) \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)\right).$$

قضایای عمومی حد

قضیه ۱.۲.۲ (قضیه یکتایی حد)**.** حد هر تابع در صورت وجود، یکتاست. یعنی، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$، آن‌گاه $L_1 = L_2$.

قضیه ۲.۲.۲. تابع f در نقطه a دارای حد است اگر و فقط اگر حد چپ و راست تابع f در نقطه a موجود و با هم برابر باشند.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. در این صورت

(i) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$؛

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$؛

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$، مشروط بر اینکه $L_2 \neq 0$.

(iv) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$.

تبصره. اگر یکی از حدهای $\lim_{x\to a} f(x) = L_۱$ یا $\lim_{x\to a} g(x) = L_۲$ موجود نباشند، آنگاه ممکن است قضیه ۳.۲.۲ برقرار نباشد. به عنوان مثال، فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x \in \mathbb{Q}, \\ -۱, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -۱, & x \in \mathbb{Q}, \\ ۱, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

در این صورت حد f و g در هیچ نقطه‌ای موجود نیست (تمرین ۳ همین فصل)، در حالی که $f + g \equiv ۰$، لذا حد $f + g$ در هر نقطه‌ای موجود و برابر صفر است. بار دیگر، فرض کنید

$$f(x) = \frac{۱}{x},\ x \neq ۰, \quad g(x) = x,$$

در این صورت f در $a = ۰$ دارای حد نیست، ولی

$$fg \equiv ۱,\ x \neq ۰,$$

در $a = ۰$ دارای حد یک است.

تبصره. اگر f_i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، n تابع از x باشند که دارای حد L_i هستند، آن‌گاه

(i) $\lim_{x\to a} \sum_{i=۱}^{n} f_i(x) = \sum_{i=۱}^{n} L_i$؛

(ii) $\lim_{x\to a} \prod_{i=۱}^{n} f_i(x) = \prod_{i=۱}^{n} L_i$.

۳.۲.۲ حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت

در این قسمت، مفهوم حد را به دو حالت دیگر که تعاریف حد و حد یک‌طرفه بیان شده در زیربخش‌های ۱.۲.۲ و ۲.۲.۲ این حالت‌ها را شامل نمی‌شوند، توسیع می‌دهیم.

(i) حد در بی‌نهایت، که در آن x به اندازه دلخواه بزرگ مثبت و یا کوچک منفی می‌شود؛

(ii) حد بی‌نهایت، که در آن مقدار حد، یک عدد نیست و مقدار تابع در نزدیکی نقطه حدی، به اندازه دلخواه بزرگ مثبت و یا کوچک منفی می‌شود.

تعریف حد در بی‌نهایت

فرض کنید تابع f در بازه $(0, +\infty)$ تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f وقتی x به سمت $+\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x\ (x > M \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)).$$

به طور مشابه، اگر تابع f در بازه $(-\infty, 0)$ تعریف شده باشد، گوییم حد تابع f وقتی x به سمت $-\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ \forall x\ (x < -M \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)).$$

تعریف حد بی‌نهایت

فرض کنید تابع f در یک همسایگی محذوفی از a تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f وقتی x به سمت a میل می‌کند به $+\infty$ میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

هرگاه

$$\forall N > 0,\ \exists \delta,\ \forall x\ (x \in N^*_\delta a \Longrightarrow f(x) > N).$$

به طور مشابه، اگر تابع f در یک همسایگی محذوفی از a تعریف شده باشد. گوییم حد تابع f وقتی x به سمت a میل می‌کند به $-\infty$ میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty,$$

هرگاه

$$\forall N > 0,\ \exists \delta,\ \forall x\ (x \in N^*_\delta(a) \Longrightarrow f(x) < -N).$$

مثال ۴.۲.۲. تحقیق کنید $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{x^۲} = +\infty$.

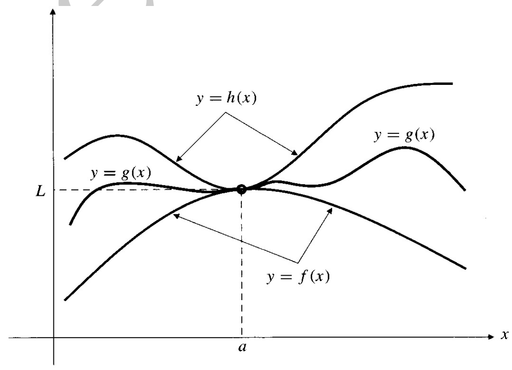
تبصره. اگر در قضیه ۳.۲.۲ به جای a یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ را قرار دهیم، این قضیه به شرط وجود حدهای مربوط به آن‌ها برقرار می‌ماند.

قضیه زیر ابزار مفیدی در محاسبه حدود است:

قضیه ۴.۲.۲ (فشار یا ساندویچ)**.** فرض کنید در یک همسایگی محذوفی از a داشته باشیم

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

و $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.



شکل ۲.۲

مثال ۵.۲.۲. نشان دهید

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to ۰} x\left\lfloor \frac{۱}{x} \right\rfloor = ۱, \quad \text{(ii)}\ \lim_{x\to ۰} \sin x = ۰, \quad \text{(iii)}\ \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱.$$

مثال ۶.۲.۲. با توجه به مثال قبل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)=1,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x}=1,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{kx}}{\frac{1}{k}}=k\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=k,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\frac{\alpha}{\beta}.
\end{aligned}$$

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید f یک تابع کراندار باشد و $\lim_{x\to a} g(x)=0$. در این صورت $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

مثال ۷.۲.۲. تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ کراندار است و $\lim_{x\to 0} x=0$، بنابراین $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$. اگر $L>0$ ($L<0$)، آن‌گاه در یک همسایگی محذوف از a داریم $f(x)>0$ ($f(x)<0$).

قضیه ۷.۲.۲. اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد، آن‌گاه f در یک همسایگی محذوف از a کراندار است.

مثال ۸.۲.۲. با توجه به اینکه $f(x)=\tan x$ در هیچ همسایگی از نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ کراندار نیست، بنا به عکس نقیض قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت، $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ موجود نیست.

تبصره. اگر در قضایای فوق، به‌جای a از a^+، a^-، $+\infty$ یا $-\infty$ استفاده کنیم، نتایج همچنان برقرارند.

تبصره. در محاسبه حدود گاهی با حالت‌هایی مواجه می‌شویم که مقدار حد در آن‌ها با توجه به مسائل مختلف جواب‌های متفاوتی دارند. این حالت‌ها که حالات مبهم نامیده می‌شوند عبارتند از

$$\infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\times\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$

توجه کنید که در حالت‌های مبهم عدد صفر یا یک باید به صورت حدی باشند. به عنوان مثال، 1^∞ در صورتی که عدد یک به صورت مطلق باشد، حالت مبهم نبوده و برابر یک

است.
حالات مبهم $\infty \times 0$ و $\infty - \infty$ با استفاده از عملیات جبری (مخرج مشترک گرفتن،ضرب در مزدوج و ...) و حالات مبهم نمایی 1^{∞}، ∞^{0}، 0^{0} با استفاده از لگاریتم‌گیری (در فصل ۴ بحث خواهد شد) به حالات مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ قابل تبدیل هستند.

مثال ۹.۲.۲. حدود زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan(\frac{\pi}{4} - x), \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 1} \frac{x^{20} - 4x + 3}{x^{15} - 5x + 4}$$

تعریف ۲.۲.۲. تابع $\alpha(x)$ را وقتی $x \to a$ ($x \to \infty$)، بی‌نهایت کوچک می‌نامند هرگاه $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$). به همین ترتیب، $\alpha(x)$ را بی‌نهایت بزرگ می‌نامند هرگاه $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = \infty$).

مقایسه بی‌نهایت کوچک‌ها

فرض کنید $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ وقتی $x \to a$ بی‌نهایت کوچک باشند و $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$:

- اگر c عددی غیر صفر باشد، آن‌گاه $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ بی‌نهایت کوچک هم‌مرتبه هستند؛
- اگر $c = 1$، آن‌گاه $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ را هم‌ارز می‌نامند و به صورت $\alpha(x) \sim \beta(x)$ نشان می‌دهند؛
- اگر $c = 0$، آن‌گاه $\alpha(x)$ را یک بی‌نهایت کوچک از مرتبه بالاتر نسبت به β می‌نامند و $\beta(x)$ را بی‌نهایت کوچک از مرتبه پایین‌تر نسبت به $\alpha(x)$ می‌نامند.

نکاتی در مورد توابع بی‌نهایت کوچک

۱. اگر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ وقتی $x \to a$، بی‌نهایت کوچک باشند و $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ و $\beta(x) \sim \delta(x)$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$$

۲. اگر $\alpha(x)$ یک بی‌نهایت کوچک باشد، آن‌گاه بعضی هم‌ارزی‌ها عبارتند از:

$$\begin{array}{ll}
\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) & \tan\alpha(x) \sim \alpha(x) \\
\sin^{-1}\alpha(x) \sim \alpha(x) & \tan^{-1}\alpha(x) \sim \alpha(x) \\
\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x) & a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a \\
(1+\alpha(x))^n - 1 \sim n\alpha(x) & \sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}
\end{array}$$

۳. اگر تابع f برابر مجموع یک مقدار ثابت b و یک بی‌نهایت کوچک مانند $\alpha(x)$ باشد ($f(x) = b + \alpha(x)$)، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad (\lim_{x\to\infty} f(x) = b)$$

۴. اگر $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ دو بی‌نهایت کوچک باشند، آن‌گاه $\alpha(x)\beta(x)$ نیز بی‌نهایت کوچک است.

۵. اگر $z(x)$ یک تابع کراندار و $\alpha(x)$ یک بی‌نهایت کوچک باشد، آن‌گاه $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ نیز یک بی‌نهایت کوچک است.

مثال ۲.۲.۱۰. حدود زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$$

$$\text{(iii)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

۳.۲ مجانب‌ها

به طور کلی مجانب یک منحنی، خط (یا منحنی) است که در بی‌نهایت، تابع به آن نزدیک می‌شود. معمولاً منظور از مجانب خط مجانب است که با توجه به وضعیت خط، سه حالت مختلف دارد:

۱) مجانب قائم: خط $x = a$ را مجانب قائم تابع f گویند هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

۲) مجانب افقی: خط $y = b$ را مجانب افقی تابع f گویند هرگاه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ یا $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$.

۳) مجانب مایل: خط $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ را مجانب مایل تابع f گویند هرگاه $\lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$. برای محاسبه a و b می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax).$$

تبصره. موارد زیر در محاسبه مجانب‌ها می‌تواند مفید باشد:

- در توابع کسری، مجانب قائم معمولاً در ریشه مخرج رخ می‌دهد. در این حالت اگر a ریشه مشترک صورت و مخرج باشد، هرگاه چندگانگی a به عنوان ریشه در مخرج از صورت بیشتر باشد، $x = a$ مجانب قائم خواهد بود.

- در توابع لگاریتمی ریشه عبارتی که از آن لگاریتم گرفته شده است، کاندیدای مجانب قائم است.

- اگر تابع f به صورت $f(x) = ax + b + g(x)$ $(a \neq 0)$ نوشته شود و $g(x)$ یک تابع بی‌نهایت کوچک وقتی $x \to \pm\infty$ باشد، آن‌گاه $y = ax + b$ معادله مجانب مایل برای f خواهد بود.

- در توابع گویا یعنی $\frac{p(x)}{q(x)}$ که p و q دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجه صورت کمتر یا مساوی درجه مخرج باشد، تابع مجانب افقی دارد و اگر درجه صورت یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد، تابع مجانب مایل دارد و خارج قسمت تقسیم $p(x)$ بر $q(x)$ معادله مجانب مایل را مشخص می‌کند.

- توابع مثلثاتی (و به طور کلی متناوب) فاقد مجانب افقی و مایل هستند و توابع کراندار فاقد مجانب قائم هستند.

مثال ۱.۳.۲. معادله مجانب‌های توابع زیر را مشخص کنید.

$$\text{(i)}\ f(x) = \frac{x^{۳} - ۱}{x^{۲} - ۱} \qquad \text{(ii)}\ f(x) = x \cos \frac{۱}{\sqrt{x}}$$

۴.۲ پیوستگی

فرض کنید f در یک همسایگی از a تعریف شده باشد. f را در نقطه a پیوسته گویند هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. به عبارت دیگر، f در نقطه a پیوسته است اگر نمودارش در $(a, f(a))$ مشکلی نداشته باشد و بتوان نمودار آن را بدون برداشتن قلم از کاغذ کشید. همچنین

- اگر $a \notin D_f$ یا $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$، آن‌گاه f را در نقطه a ناپیوسته گویند.
- اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ ، f در a پیوستگی راست دارد.
- اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ، f در a پیوستگی چپ دارد.

قضیه ۱.۴.۲. تابع f در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر در a هم پیوسته راست باشد و هم پیوسته چپ.

تعریف ۱.۴.۲ (پیوستگی در نقاط انتهایی)**.** گوییم تابع f در نقطه انتهایی چپ از قلمرواش پیوسته است اگر در این نقطه پیوسته راست باشد. همچنین، تابع f در نقطه انتهایی راست از قلمرواش پیوسته است اگر در این نقطه پیوسته چپ باشد.

مثال ۱.۴.۲. تابع $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ با قلمرو $D_f = [-۲, ۲]$ در هر نقطه $c \in (-۲, ۲)$، در نقطه انتهایی چپ قلمرواش یعنی -۲ و در نقطه انتهایی راست قلمرواش یعنی ۲ پیوسته است. زیرا،

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c),\ (c \in (-۲, ۲)), \quad \lim_{x\to -۲^+} f(x) = f(-۲), \quad \lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲).$$

تعریف ۲.۴.۲ (ناپیوستگی)**.** اگر ناپیوستگی تابع f ناشی از موارد زیر باشد:

$$(\mathrm{i})\, a \notin D_f,\ \lim_{x\to a} f(x) = L, \quad (\mathrm{ii})\, a \in D_f,\ \lim_{x\to a} f(x) = L \neq f(a)$$

آن‌گاه ناپیوستگی f در a را ناپیوستگی نوع اول یا رفع شدنی می‌نامند. در واقع، در چنین حالتی با تعریف $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$، می‌توان یک تابع پیوسته در نقطه a به‌دست آورد.
اما اگر ناپیوستگی تابع f ناشی از عدم وجود حد تابع f در نقطه a باشد، در این صورت ناپیوستگی تابع f را از نوع دوم یا رفع نشدنی می‌گویند.

مثال ۲.۴.۲. فرض کنید g در a پیوسته باشد و $f(x) = \lfloor g(x) \rfloor$. در این صورت

- اگر $g(a) \notin \mathbb{Z}$، آن‌گاه f در a پیوسته است.

- اگر $g(a) \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه f فقط وقتی که a نقطه می‌نیمم نسبی g باشد، در این نقطه پیوسته است.

- اگر $g(a) \in \mathbb{Z}$ و g در a نقطه ماکزیمم نسبی باشد آن‌گاه f در این نقطه ناپیوستگی رفع شدنی دارد.

قضیه ۲.۴.۲. اگر f و g در a پیوسته باشند، آن‌گاه توابع $f \pm g$، $f \cdot g$ و f/g $(g(a) \neq 0)$ نیز در a پیوسته‌اند.

تبصره. توابع زیر هرجا تریف شده‌اند، پیوسته‌اند:

- همه چندجمله‌ای‌ها؛

- همه توابع گویا به جز در ریشه‌های مخرج؛

- همه توان‌های گویای $x^{\frac{n}{m}}$؛

- توابع سینوس و کسینوس؛

- توابع تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت بجز در ریشه‌های مخرج؛

- تابع قدرمطلق.

قضیه ۳.۴.۲ (ترکیب توابع پیوسته)**.** اگر تابع f در نقطه a و تابع g در نقطه $f(a)$ پیوسته باشد، آن‌گاه $g \circ f$ در نقطه a پیوسته است. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} g(f(x)) &= \lim_{x \to a} g \circ f(x) \\
&= g \circ f(a) \\
&= g(f(a)) \\
&= g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right).
\end{aligned}$$

در حالت کلی، اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و g در L پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} g(f(x)) &= \lim_{x\to a} g\circ f(x)\\ &= g(L)\\ &= g(\lim_{x\to a} f(x)).\end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد اگر g در L پیوسته باشد، آن‌گاه g جایش را با $\lim$ عوض می‌کند.

تبصره. عکس قضیه فوق برقرار نیست. به عنوان مثال نقض برای عکس قضیه فوق، می‌توان فرض کرد

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

توابع f و g در هیچ نقطه‌ای پیوسته نیستند، اما $f+g$ و $f\cdot g$ پیوسته‌اند. همچنین $f\circ g\equiv 0$ و $g\circ f\equiv 1$ در همه جا پیوسته‌اند.

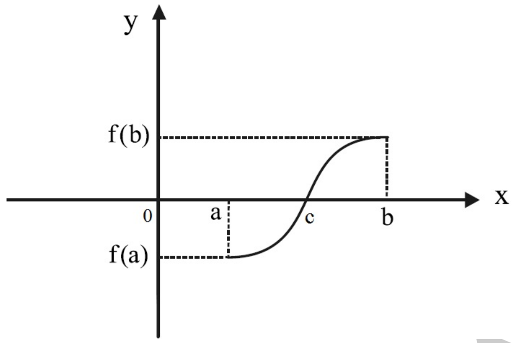
مثال ۳.۴.۲. فرض کنید g در a پیوسته باشد و $g(a)\neq 0$. نشان دهید $\dfrac{1}{g(x)}$ در a پیوسته است.

۱.۴.۲ پیوستگی سراسری

- تابع f را در بازه (a,b) پیوسته گویند هرگاه در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.
- تابع f را در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته گویند هرگاه در بازه (a,b) پیوسته، در a پیوسته راست و در b پیوسته چپ باشد.

به‌طور مشابه، می‌توان پیوستگی در بازه‌های $[a,b)$، $(a,b]$ را تعریف کرد. به عنوان مثال، تابع $f(x)=\lfloor x\rfloor$ با قلمرو $[0,2]$ در بازه‌های $[0,1)$ و $[1,2)$ پیوسته است ولی در نقاط ۱ و ۲ ناپیوسته است.

قضیه ۴.۴.۲ (قضیه بولزانو)**.** فرض کنید تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$. در این صورت حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد به طوری که $f(c) = 0$.



شکل ۳.۲

به طور هندسی، همان‌طور که در شکل ۳.۲ نشان داده شده است، قضیه بولزانو بیان می‌کند که اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند و f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f محور xها را در نقطه‌ای میان a و b قطع می‌کند.
کاربرد مهم این قضیه، یافتن بازه‌ای است که تابع f در آن دارای ریشه باشد.

تبصره. اگر $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)f(b) \leq 0$) و f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f حداقل یک ریشه در بازه (a,b) (بازه $[a,b]$) دارد. توجه کنید که اگر $f(a)f(b) > 0$، در حالت کلی در مورد وجود یا عدم وجود ریشه نمی‌توان اظهار نظر کرد، اما در مورد توابع پیوسته و یکنوای اکید می‌توان عدم وجود ریشه را نتیجه گرفت.

تعریف ۳.۴.۲ (خاصیت مقدار میانی)**.** گوییم تابع f بر بازه I در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند، هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in I$ عدد x_0 بین x_1 و x_2 وجود داشته باشد که $f(x_0)$ بین $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قرار بگیرد.

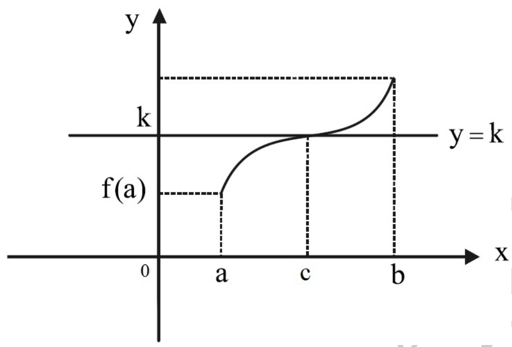
قضیه زیر بیان می‌کند که هر تابع پیوسته در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

قضیه ۵.۴.۲ (قضیه مقدار میانی)**.** اگر f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد. در این صورت عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = k$. (به عبارت دیگر f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.)

برهان. فرض کنید $f(a) < k < f(b)$. تابع $g(x) = f(x) - k$ را در بازه $[a,b]$ در نظر بگیرید. چون تابع ثابت k و تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته هستند، لذا تابع g نیز در این بازه

پیوسته است. از طرفی $g(a)g(b) < 0$. لذا از قضیه بولزانو، می‌توان نتیجه گرفت عدد c در بازه (a,b) وجود دارد به طوری که $g(c) = 0$، لذا $f(c) = k$. $\square$

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی، که در شکل ۴.۲ نشان داده شده است، بدین صورت است که خط $y = k$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.



شکل ۴.۲

تبصره. شرط پیوستگی در قضیه مقدار میانی، شرط کافی است نه لازم. به عنوان مثال، تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ در بازه $[-1,1]$ ناپیوسته است اما در خاصیت مقدار میانی صدق می‌کند.

مثال ۴.۴.۲. نشان دهید چندجمله‌ای درجه فرد

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + a_1x + a_0$$

حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

قضیه ۶.۴.۲. فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. در این صورت f ماکزیمم و می‌نیمم خود را در این بازه اختیار می‌کند؛ یعنی نقاط c و d در بازه $[a,b]$ وجود دارند به طوری که $f(c)$ ماکزیمم و $f(d)$ می‌نیمم مقدار تابع f در بازه $[a,b]$ است.

مثال ۵.۴.۲. اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، ثابت کنید نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=c$. (چنین نقطه‌ای، نقطه ثابت f نامیده می‌شود.)

مثال ۶.۴.۲. فرض کنید توابع f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند و $f(a)<g(a)$ و $f(b)>g(b)$. نشان دهید cای از (a,b) وجود دارد به طوری که $f(c)=g(c)$.

مثال ۷.۴.۲. تابع پیوسته $f:[۰,۱]\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(۱)=f(۰)$، ثابت کنید نقطه‌ای مانند $c\in[۰,۱]$ وجود دارد که $f(c)=f(c+\frac{۱}{۳})$.

۵.۲ مسایل

۱. فرض کنید $f(x) = (\lfloor x \rfloor - ۱)(\lfloor x \rfloor - ۲) + ۴x$. اگر $\lim_{x \to ۲} f(x) = \ell$، در این صورت برای این که $f(x)$ در همسایگی به مرکز ℓ و شعاع ε قرار گیرد، x باید در همسایگی به مرکز ۲ و شعاع δ باشد. بزرگترین مقدار δ چقدر است؟

۲. نشان دهید تابع

$$f(x) = \begin{cases} ۱, & x \in \mathbb{Q}, \\ -۱, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

۳. حدود زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)} \lim_{x \to \infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor ۲x \rfloor + \cdots + \lfloor ۱۰۰x \rfloor}{x} \qquad \text{(ii)} \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^۲ + ۲x} - \sqrt{x^۲ - ۲x} \right)$$

$$\text{(iii)} \lim_{x \to \infty} \left(\sin \sqrt{x + ۱} - \sin \sqrt{x} \right) \qquad \text{(iv)} \lim_{x \to ۰^+} \frac{\sin^۳ \sqrt{x} \ln(۱ + ۳x)}{\left(\tan^{-۱} \sqrt{x}\right)^۲ \left(e^{۵\sqrt[۳]{x}} - ۱\right)}$$

$$\text{(v)} \lim_{x \to ۱} \frac{x + x^۲ + \cdots + x^n - n}{x - ۱} \qquad \text{(vi)} \lim_{n \to \infty} (۱ + \frac{۱}{n^۲})(۱ + \frac{۲}{n^۲}) \cdots (۱ + \frac{n}{n^۲})$$

برای حل قسمت (vi)، به عنوان راهنمایی، از نامساوی $x(۱ - x) \leq \ln(۱ + x) \leq x$ استفاده کنید.

۴. معادله مجانب‌های منحنی پارامتری $x = \dfrac{a}{\tan \theta}$ و $y = \dfrac{b}{\sin \theta}$ را مشخص کنید.

۵. پیوستگی یا ناپیوستگی توابع زیر را با ذکر نوع آن‌ها در نقطه $x = ۰$ بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{۱}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}, \quad \text{(ii)}\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases},$$

$$\text{(iii)}\ f(x) = \mathbf{sign}(x)$$

۶. با فرض اینکه تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x & -\pi\leq x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & \frac{\pi}{2}\leq x\leq \pi \end{cases}$$

پیوسته است، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۷. اعداد حقیقی $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n$ مفروض‌اند. ثابت کنید چندجمله‌ای

$$p(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)+(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)$$

دارای n ریشه حقیقی است.

۸. فرض کنید $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$ که در آن a_iها اعداد حقیقی ثابت هستند و $n\in\mathbb{N}$. می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x، $|f(x)|\leq|\sin(x)|$. نشان دهید

$$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\leq 1.$$

۹. فرض کنید f تابعی پیوسته در بازه $[0,1]$ بوده و $f(0)=f(1)$.

الف) نشان دهید نقطه‌ای مانند a در بازه $[0,\frac{1}{2}]$ وجود دارد به طوری که $f(a)=f(a+\frac{1}{2})$؛

ب) اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ باشد، نشان دهید که به ازای aای در بازه $[0,1-\frac{1}{n}]$ داریم

$$f(a)=f(a+\frac{1}{n}).$$

۱۰. درست یا نادرست؟ اگر درست است دلیل بیاورید و در غیر این صورت مثال نقض بیاورید.

الف) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود نباشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود ندارد؛

ب) هرگاه f در a پیوسته باشد، $|f|$ نیز چنین است و برعکس؛

پ) هرگاه هیچ یک از $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود نباشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود ندارد؛

ت) هرگاه به ازای هر x در یک بازه حول a داشته باشیم $f(x)<g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ هر دو موجود باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

فصل ۳

دنباله‌های عددی

۱.۳ مقدمه

برای ریختن پایه‌های سری‌های نامتناهی، در این فصل مبحث مربوط به آن، یعنی دنباله‌های نامتناهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که کاربردهای فراوان دیگری نیز دارد.

۲.۳ تعریف و همگرایی دنباله‌ها

تعریف ۱.۲.۳. منظور از یک راست قطعه از اعداد صحیح، مجموعه‌ای به شکل

$$\{k, k+۱, k+۲, \ldots\}$$

است که در آن k یک عدد صحیح است. به عبارت دیگر، راست قطعه مجموعه‌ای متشکل از همه اعداد صحیح بزرگتر یا مساوی با عدد صحیح داده شده است. فرض کنید S راست قطعه‌ای از اعداد صحیح و E مجموعه‌ای دلخواه باشد. هر تابع مانند $a : S \to E$ را دنباله‌ای در E می‌نامیم. لذا به هر عضو S مانند n عضوی از E را نسبت می‌دهد که آن‌را با $a(n)$ و معمولاً با نماد a_n نمایش می‌دهیم. a_nها را جمله‌های دنباله می‌نامیم. لذا جمله‌های هر دنباله را می‌توان طوری مرتب کرد که اندیس‌هایشان صعودی باشند.

$$a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \ldots \qquad (۱.۳)$$

توجه کنید، لازم نیست a_nها به عنوان اعضای E متمایز باشند. دنباله (۱.۳) را با یکی از نمادهای

$$\{a_n\}_{n=k}^{\infty}\ , \qquad (a_n)_{n\geq k}\ , \qquad (a_n)$$

نمایش می‌دهیم. دنباله‌ای که جملات آن عدد باشند، دنباله عددی می‌نامیم.

یک دنباله عددی را می‌توان به سه طریق مشخص کرد:

(i) اگر طرح دنباله واضح باشد، چند جمله اول را نوشته و سپس "..." می‌گذاریم؛

(ii) برای جمله عمومی a_n به صورت تابعی از n می‌توان فرمولی به‌دست آورد؛

(iii) برای محاسبه جمله a_n به صورت تابعی از جملات قبلی a_1، a_2، ...، a_{n-1} می‌توان فرمولی ارائه داد.

$$\{n\}=\{1,2,3,\ldots\}$$
$$\left\{(-\frac{1}{2})^n\right\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots\right\}$$
$$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\ldots\right\}$$
$$\{(-1)^{n-1}\}=\{\cos(n-1)\pi\}=\{1,-1,1,-1,\ldots\}$$
$$\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{9}{8},\frac{25}{32},\frac{36}{64},\ldots\right\}$$
$$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}=\left\{2,\frac{9}{4},\frac{64}{27}\ldots\right\}$$
$$\left\{\frac{\cos(n\pi/2)}{n}\right\}=\left\{0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\ldots\right\}$$
$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n},\ (n=1,2,3\ldots)$$

در مثال آخر از دنباله‌های فوق، فرمولی واضح برای a_n به عنوان تابعی صریح از n وجود ندارد ولی می‌توان a_n را به ازای هر مقدار مطلوب n حساب کرد مشروط بر اینکه ابتدا همه مقادیر a_2، a_3، ...، a_{n-1} را محاسبه کنیم.

تعریف ۲.۲.۳. هرگاه جمله عمومی یک دنباله بر حسب جملات قبل از آن تعریف شود، دنباله را دنباله بازگشتی می‌نامند.

مثال ۱.۲.۳. دنباله $(n \geq 2)$ ،$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n},$ دنباله بازگشتی است،که

$$\{a_n\} = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \dots\right\}.$$

دنباله فیبوناچی مثالی دیگر از دنباله بازگشتی است که به صورت

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ (n \geq 3)$$

تعریف می‌شود:

$$\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}.$$

همگرایی دنباله‌ها

مفهوم همگرایی در قلب دنباله قرار دارد. مفهوم حد یک دنباله حالت خاصی از مفهوم حد در بی‌نهایت یک تابع است.
گوییم دنباله $\{a_n\}$ هگرا به حد ℓ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ، مشروط بر اینکه فاصله a_n تا ℓ روی خط اعداد حقیقی وقتی n به سوی ∞ افزایش یابد، به صفر نزدیک گردد.

تعریف ۳.۲.۳ (تعریف صوری حد یک دنباله)**. دنباله** $\{a_n\}$ به حد ℓ همگراست هرگاه به ازای هر عدد حقیقی مثبت ε عدد صحیحی مانند N (که ممکن است وابسته به ε باشد) موجود باشد به طوری که هرگاه $n \geq N$ آن‌گاه $|a_n - \ell| < \varepsilon$. یا به زبان ریاضی، دنباله $\{a_n\}$ به حد ℓ همگراست هرگاه

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon).$$

تعریف ۴.۲.۳. دنباله‌ای که دارای حد باشد، همگرا و در غیر این صورت واگرا نامند.

مثال ۲.۲.۳. نشان دهید:

(i) به ازای هر عدد حقیقی c و هر $p > 0$،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0.$$

(ii) به ازای هر $\circ < p < ۱$، دنباله $\{p^n\}$ هگرا به صفر است.

مثال ۳.۲.۳. فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد. نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+۱}-a_n)=\circ$.

تبصره. معمولاً $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ را با نماد $a_n\longrightarrow\ell$ نشان می‌دهند.

تبصره.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \Longleftrightarrow \forall M>\circ,\ \exists N,\ \forall n\ (n\geq N\Longrightarrow |a_n|>M).$$

تبصره. حد یک دنباله هم ارز حد یک تابع است وقتی شناسه‌اش به بی‌نهایت نزدیک می‌شود. در واقع، هرگاه $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ell$ و $a_n=f(n)$، آن‌گاه $a_n\longrightarrow\ell$.
به عنوان مثال، برای یافتن حد دنباله $\{a_n\}=\left\{\dfrac{n^۲-۴n+۶}{n^۳-۶n^۲}\right\}$، با فرض

$$f(x)=\frac{x^۲-۴x+۶}{x^۳-۶x^۲},\ (x>۲)$$

چون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\circ$، نتیجه می‌گیریم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\circ$.
به خاطر این امر، قواعد متعارف حدود توابع برای حدود دنباله‌ها با تغییرات مناسبی، در دنباله‌ها نیز برقرارند.

قضیه ۱.۲.۳. اگر $a_n \longrightarrow a$، $b_n \longrightarrow b$ و c عدد ثابت باشد، آن‌گاه

$$(\mathrm{i})\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n \qquad (a_n \pm b_n \longrightarrow a \pm b)$$

$$(\mathrm{ii})\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \qquad (a_n b_n \longrightarrow a\,b)$$

$$(\mathrm{iii})\ \lim_{n\to\infty} c\,a_n = c\lim_{n\to\infty} a_n \qquad (c\,a_n \longrightarrow c\,a)$$

$$(\mathrm{iv})\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \qquad (\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}\ \text{if}\ b \neq ۰)$$

$$(\mathrm{v})\text{if}\ \exists N,\ \forall n \geq N:\ a_n \leq b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

مثال ۴.۲.۳. اگر $a_n \longrightarrow a$ و $p \in \mathbb{N}$، آن‌گاه با استفاده از قسمت (ii) قضیه ۱.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت $a_n^p \longrightarrow a^p$.

تبصره. در قضیه ۱.۲.۳ در حالتی که یکی از دنباله‌های $\{a_n\}$ یا $\{b_n\}$ واگرا به ∞ باشد، قضیه برقرار است، به شرط اینکه در (ii) $a \neq ۰$ یا $b \neq ۰$ باشد.

مثال ۵.۲.۳. حدهای زیر را حساب کنید.

$$(\mathrm{i})\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[۵]{n^۲}\cos n!}{\sqrt{n+۱}} \qquad (\mathrm{ii})\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{n^۲}+\frac{۲}{n^۲}+\ldots+\frac{n-۱}{n^۲}\right)$$

تعریف ۵.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر n داشته باشیم $a_{n+۱} \geq a_n$ و با حذف علامت تساوی تعریف صعودی اکید به‌دست می‌آید.

تعریف ۶.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ را نزولی می‌نامیم هرگاه برای هر n داشته باشیم $a_{n+۱} \leq a_n$ و با حذف علامت تساوی تعریف نزولی اکید به‌دست می‌آید.

تعریف ۷.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ را یکنوا می‌نامیم هرگاه صعودی یا نزولی باشد.

تعریف ۸.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ را از بالا کراندار می‌نامیم هرگاه عدد ثابت $\beta \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای هر n داشته باشیم $a_n \leq \beta$.

تعریف ۹.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ را از پایین کراندار می‌نامیم هرگاه عدد ثابت $\alpha \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای هر n داشته باشیم $a_n \geq \alpha$.

تعریف ۱۰.۲.۳. دنباله‌ای که از پایین و از بالا کراندار باشد را کراندار می‌نامیم و در غیر این صورت، آنرا بی‌کران می‌نامیم.

تبصره. از تعریف ۱۰.۲.۳ نتیجه می‌شود: دنباله $\{a_n\}$ کراندار است اگر و تنها اگر عدد $M > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر n داشته باشیم $|a_n| \leq M$.

مثال ۶.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ با $a_n = \frac{n}{n+۱}\cos(n\pi)$ یکنوا نمی‌باشد، زیرا جملات این دنباله نوسانی است. اما کراندار است، زیرا $|a_n| \leq \frac{n}{n+۱} \leq ۱$.

قضیه ۲.۲.۳. اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه کراندار است.

برهان. فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. لذا به ازای $\varepsilon = ۱$، عددی مانند N هست به طوری که به ازای هر $n \geq N$، نامساوی $|a_n - \ell| < \varepsilon = ۱$ برقرار است. بنابراین، به ازای چنین nای، $||a_n| - |\ell|| \leq |a_n - \ell| < ۱$، پس $|a_n| < ۱ + \ell$. اگر M ماکزیمم اعداد $|a_۱|$، $a_۲$، $\ldots$، a_N و $|\ell| + ۱$ باشد، آن‌گاه به ازای هر $n = ۱, ۲, \ldots$، داریم $|a_n| \leq M$. $\square$

تبصره. عکس قضیه فوق درست نیست. به عنوان مثال، $\{(-۱)^n\}$ کراندار ولی واگراست.

قضیه ۳.۲.۳. هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست. (هر دنباله نزولی و از پایین کراندار همگراست.)

تبصره. اگر دنباله‌ای از مرحله‌ای به بعد، یکنوا باشد، باز هم قضیه فوق برقرار است.

مثال ۳.۲.۷. دنباله $\{a_n\}$ با رابطه $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$ و $a_0 = \frac{3}{2}$ مفروض است. حد آن‌را بیابید.

مثال ۳.۲.۸. فرض کنید $0 < a_0 < b_0$ و دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با روابط زیر تعریف شوند

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

بررسی کنید این دو دنباله همگرا هستند و حد آن‌ها را بیابید.

مثال ۳.۲.۹. فرض کنید a_n به صورت بازگشتی به صورت زیر داده شده باشد

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \ n \geq 1.$$

نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد و مقدارش را بیابید.

مثال ۳.۲.۱۰. نشان دهید دنباله $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ همگراست.

تعریف ۳.۲.۱۱. اگر برخی جملات دنباله $\{a_n\}$ (که تعداد آن‌ها نامحدود است) با همان ترتیب در دنباله‌ای ظاهر شود، دنباله حاصل را زیردنباله $\{a_n\}$ می‌نامند. به صورت دقیق‌تر، اگر تابع $\phi : S \to S$ صعودی اکید باشد، دنباله $\{a_{\phi(n)}\}$ را زیردنباله $\{a_n\}$ می‌نامند.

قضیه ۳.۲.۴. دنباله $\{a_n\}$ همگرا به ℓ است اگر و فقط اگر هر زیردنباله آن همگرا به ℓ باشد.

تبصره. فرض کنید $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ دو زیردنباله از $\{a_n\}$ باشند. در این صورت:

- اگر $\{a_n\}$ کراندار باشد، $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ نیز کراندار هستند.
- اگر $a_n \longrightarrow \ell$، آن‌گاه $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ نیز به ℓ همگرا هستند.
- اگر $b_n \longrightarrow \ell_1$ و $c_n \longrightarrow \ell_2$ و $\ell_1 \neq \ell_2$، آن‌گاه دنباله $\{a_n\}$ واگراست.

توجه کنید که اگر $\ell_1 = \ell_2$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $\{a_n\}$ همگراست. اما اگر $\{b_n\} \cup \{c_n\}$ فقط در تعداد متناهی جمله با $\{a_n\}$ متفاوت باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $\{a_n\}$ نیز به ℓ_1 همگراست. مثلاً اگر زیردنباله‌های زوج (زیر دنباله با اندیس زوج) و فرد (زیردنباله با اندیس فرد) یک دنباله به عدد یکسانی همگرا باشند، آن‌گاه دنباله همگراست. به بیان دقیق‌تر:

قضیه ۳.۲.۵. دنباله $\{a_n\}$ همگرا به ℓ است اگر و فقط اگر زیردنباله‌های زوج و فرد آن همگرا به ℓ باشند.

- اگر $\{b_n\}$ فاقد حد باشد، $\{a_n\}$ نیز حد نخواهد داشت.

مثال ۳.۲.۱۱. دنباله $\{a_n\}$ با $a_n = \cos(n\pi)$ فاقد حد است. زیرا اگر جملات زوج آن دنباله $\{b_n\}$ و جملات فرد آن دنباله $\{c_n\}$ باشند،داریم $b_n = 1$ و $c_n = -1$، پس دو زیردنباله از a_n حدودی متفاوت دارند.

مثال ۳.۲.۱۲. فرض کنید $a_1 = 3$ و به ازای $n \geq 2$ داشته باشیم $a_n = \dfrac{2}{1 + a_{n-1}}$. نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگراست. سپس مقدار حد آن‌را محاسبه کنید.

قضیه ۶.۲.۳. هر دنباله شامل یک زیردنباله صعودی یا نزولی است.

تعریف ۱۲.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ را دنباله کوشی می‌نامند هرگاه

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n, m\ (n, m \geq N \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)\,.$$

قضیه ۷.۲.۳. دنباله $\{a_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر $\{a_n\}$ دنباله کوشی باشد.

مثال ۱۳.۲.۳. فرض کنید جملات $\{a_n\}$ در نامساوی $|a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{3^n}$ صدق کند. نشان دهید $\{a_n\}$ همگراست.

مثال ۱۴.۲.۳. فرض کنید $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. اگر $\left\{\frac{c_{n+1}}{c_n}\right\}$ همگرا باشد، آن‌گاه $\{\sqrt[n]{c_n}\}$ نیز همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

مثال ۱۵.۲.۳. حاصل حد $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ را بیابید.

قضیه ۸.۲.۳. فرض کنید تابع f در همسایگی از نقطه a مانند $N_\delta(a)$ تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\{a_n\} \subseteq N_\delta(a) \ (a_n \longrightarrow a \Longrightarrow f(a_n) \longrightarrow L).$$

استفاده مهمی که از این قضیه می‌شود، برای اثبات عدم وجود حد یک تابع در یک نقطه خاص است. به این صورت که اگر دو دنباله مناسب مانند $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا به a وجود داشته باشند که دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ حدود متفاوتی داشته باشند، آن‌گاه f در a فاقد حد است.

مثال ۱۶.۲.۳. آیا تابع $f(x) = \cos\frac{۱}{x-۲}$ در نقطه $a = ۲$ دارای حد است؟

مثال ۱۷.۲.۳. مجموعه نقاطی را که تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^۳, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در آن نقاط دارای حد است، بیابید.

قضیه ۹.۲.۳ (فشار یا ساندویچ). فرض کنید به ازای Nای داشته باشیم

$$\forall n \geq N: \ b_n \leq a_n \leq c_n.$$

در این صورت اگر $b_n \longrightarrow \ell$ و $c_n \longrightarrow \ell$، آن‌گاه $a_n \longrightarrow \ell$.

مثال ۱۸.۲.۳. حدهای زیر را حساب کنید.

(i) $\left\{\dfrac{\cos n}{n}\right\}$ (ii) $\{x^n\}, \ (|x| < ۱)$

(iii) $\left\{\dfrac{۱}{n^۲+n} + \dfrac{۱}{n^۲+n+۱} + \cdots + \dfrac{۱}{n^۲+۲n}\right\}$ (iv) $\left\{\sqrt[۲n]{۳^n + ۵^n + ۷^n + ۹^n}\right\}$

تبصره. نشان می‌دهیم

$$\forall x \geq -1: \ (1+x)^n \geq 1+nx, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

در اتحاد

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1}),$$

قرار می‌دهیم $a = x+1$ و $b = 1$، در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(x+1)^n - 1 &= x\left((x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \ldots + (x+1) + 1\right)\\ &= Px\end{aligned}$$

که در آن

$$P = (x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \ldots + (x+1) + 1.$$

- اگر $x \geq 0$:

$$x+1 \geq 1 \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \ (1+x)^k \geq 1 \Longrightarrow P \geq n,$$

و چون $x \geq 0$،

$$Px \geq nx. \tag{۲.۳}$$

- اگر $-1 < x < 0$:

$$0 < x+1 < 1 \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \ (1+x)^k < 1 \Longrightarrow P < n,$$

و چون $-1 < x < 0$،

$$Px > nx. \tag{۳.۳}$$

از (۲.۳) و (۳.۳) نتیجه می‌شود

$$Px \geq nx \Longrightarrow (۱+x)^n - ۱ = Px \geq nx \Longrightarrow (۱+x)^n \geq ۱ + nx.$$

مثال ۱۹.۲.۳. اگر p یک عدد حقیقی مثبت باشد، نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = ۱$.

مثال ۲۰.۲.۳. نشان دهید $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$.

مثال ۲۱.۲.۳. حد دنباله $\left\{(۳^n + ۲^n)^{\frac{۱}{n}}\right\}$ را بیابید.

۳.۳ مسایل

۱. حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{۱+a+a^{۲}+\cdots+a^n}{۱+b+b^{۲}+\cdots+b^n},\ (|a|<۱,|b|<۱)\qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{۲}}{(۲n)!}$$

۲. ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ با $a_n=\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}+\ldots+\frac{۱}{۲n}$ همگراست.

۳. دنباله $\{x_n\}$ به صورت

$$x_۱=\sqrt{a}\,,\quad x_۲=\sqrt{a+\sqrt{a}}\,,\ldots,\ x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots+\sqrt{a}}}}$$

تعریف شده است. نشان دهید $\{x_n\}$ همگراست و حد آن $\frac{\sqrt{۴a+۱}+۱}{۲}$ است.

۴. دنباله $\{a_n\}$ به صورت

$$a_n=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{a_{n-۱}}+a_{n-۱}\right)\ ,\ \ a_۰=۱$$

تعریف شده است.

الف) جملات $a_۱,a_۲,a_۳$ را در این دنباله محاسبه کنید.

ب) نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگراست.

پ) حد $\{a_n\}$ را به‌دست آورید.

۵. از احکام زیر کدام درست و کدام نادرست‌اند؟ جواب‌های خود را توجیه کنید.

(الف) هرگاه $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ و $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=۰$.

(ب) هرگاه هیچ یک از $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا نباشند، آن‌گاه $\{a_nb_n\}$ همگرا نیست.

(پ) هرگاه $\{|a_n|\}$ همگرا باشد، آن‌گاه $\{a_n\}$ همگراست.

(ت) هرگاه $\lim_{n\to\infty}|a_n|=۰$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}a_n=۰$.

۶. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد که

$$a_1 \leq a_3 \leq a_5 \leq \dots$$
$$a_2 \geq a_4 \geq a_6 \geq \dots$$

و به ازای هر m و n داشته باشیم $a_{2m+1} \leq a_{2n}$. نشان دهید اگر $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$، آن‌گاه دنباله‌های $\{a_{2n}\}$، $\{a_{2n+1}\}$ و $\{a_n\}$ همگرایند و به حدی مشترک میل می‌کنند.

۷. نشان دهید حدود $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ و $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ موجود نیستند.

فصل ۴

مشتق و کاربرد آن

۱.۴ مقدمه

مشتق یکی از دو رکن اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. شکل گرفتن ایده مشتق و به‌کارگیری مؤثر آن پاسخگوی چند نیاز علمی و ریاضی ریشه‌دار بود. پس از رواج مدل‌سازی مسایل ریاضی در قالب جبری و به‌ویژه پیدایش هندسه تحلیلی، مفهوم مشتق در قرن هفدهم میلادی در آثار ریاضی‌دانان مختلف ظاهر شد و در کارهای ریاضی نیوتن و لایبنیتس صورت‌بندی‌های به نسبت جامعی یافت و ارتباط آن با انتگرال که سابقه تاریخی دیرینه‌تری داشت مشخص گردید.

توصیف خط مماس بر منحنی از دغدغه‌های ریاضی‌دانان قرن هفدهم بود. در عهد باستان، ریاضی‌دانان خط مماس بر منحنی را برای هر یک از تعداد محدود منحنی‌هایی که در آن دوران مورد بررسی عمیق قرار گرفته بود به کمک ویژگی‌های خاصی تعریف می‌کردند. به عنوان مثال، خط l بر دایره $\mathcal{C}$ در نقطه T مماس محسوب می‌شد اگر شعاع $\overline{OT}$ بر خط l عمود باشد. اما پس از آن‌که هندسه تحلیلی امکان ارائه کردن بی‌شمار منحنی متنوع را ممکن ساخت، ضرورت یک تعریف کلی و قابل استفاده از مماس بودن در مسایل هندسی نمایان‌تر گردید.

یکی دیگر از مسایلی که باعث بوجود آمدن مفهوم مشتق شد مساله آهنگ تغییر لحظه‌ای بود. رایج‌ترین مثال از این نوع مسایل، مدل‌سازی دقیق مفهوم سرعت یک متحرک است. یک متحرک نقطه‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست و جهت‌دار حرکت می‌کند. مکان متحرک در زمان t به صورت تابعی از زمان، $s = f(t)$، داده شده است. سرعت متوسط یا میانگین سرعت متحرک از زمان $t_۱$ تا زمان $t_۲$، به صورت $\dfrac{f(t_۲) - f(t_۱)}{t_۲ - t_۱}$

تعریف می‌شود که در واقع متوسط مسافت طی شده در واحد زمان است. اگر حرکت به‌طور یکنواخت و در یکی از دو جهت انجام گیرد این نسبت همواره مقداری ثابت است یعنی نه به زمان شروع اندازه‌گیری، نه به زمان اندازه‌گیری و نه به طول مدت اندازه‌گیری بستگی نخواهد داشت. در این وضعیت مسافت پیموده شده حاصل‌ضرب این سرعت ثابت (یکنواخت) در طول بازه زمانی حرکت است. موضوع وقتی پیچیده می‌شود که حرکت یکنواخت نباشد (سرعت متغیر باشد). در این صورت ممکن است سرعت متوسط در بازه زمانی $[t_۱, t_۲]$ اطلاع قابل استفاده‌ای در مورد شیوه حرکت در یک بازه زمانی خاص کوچکتر ندهد به خصوص اگر $[t_۱, t_۲]$ به نسبت بزرگ باشد. برای کسب اطلاعات دقیق‌تر در مورد سرعت حرکت در حوالی زمان t بهتر است دو بازه زمانی $t_۱$ و $t_۲$ نزدیک به t در نظر بگیریم که $t_۱ < t < t_۲$ و به سرعت متوسط $\dfrac{f(t_۲) - f(t_۱)}{t_۲ - t_۱}$ نگاه کنیم. هر چه $t_۱$ و $t_۲$ به t نزدیک‌تر باشند سرعت متوسط بدست آمده انعکاس دقیق‌تری از کیفیت حرکت حوالی زمان t است. آیا می‌توان به سرعت در لحظه t معنی دقیقی نسبت داد؟ اگر طول بازه زمانی را صفر در نظر بگیریم، یعنی $t_۱ = t = t_۲$ آن‌گاه $f(t_۱) = f(۲)$ و صورت و مخرج کسر $\dfrac{f(t_۲) - f(t_۱)}{t_۲ - t_۱}$ هر دو صفر می‌شوند و این عبارت معنی ندارد. راه گریز این است که سرعت در لحظه t را در واقع یک حد تلقی کنیم، یعنی حد سرعت متوسط وقتی که طول بازه زمانی به صفر میل کند. به بیان دیگر، حد زیر، در صورت وجود، به سرعت متحرک در زمان t تعبیر می‌شود:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

ممکن است این کسر متقارن به نظر نرسد، یعنی تصور شود که فقط تغییر مسافت در یک طرف بازه زمانی نسبت به t دخیل می‌شود. در واقع، چون نزدیک شدن h به ۰ هم از طرف راست و هم از طرف چپ منظور می‌شود تقارن خود به خود اعمال می‌شود [۱].

۲.۴ مشتق

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید تابع f در یک همسایگی از a تعریف شده باشد. f را در نقطه a مشتق‌پذیر گویند هرگاه

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(\lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right), \qquad (۱.۴)$$

موجود و متناهی باشد. به عبارت دیگر،

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \left(|x-a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon \right).$$

مشتق تابع f را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهند.

در تعریف فوق فرض کردیم که a یک نقطه درونی از دامنه تابع f باشد. اگر a عضوی از دامنه و نقطه حدی آن باشد، بررسی حد (۱.۴) معنی دارد. علت محدود کردن تعریف به نقاط درونی دامنه تعریف f این است که بیشتر کاربردهای مورد نظر ما به این حالت محدود می‌شود. لزومی ندارد که حالت‌های کلی‌تر را که بعضاً پیچیدگی‌های نامطلوبی دارند، در اینجا مطرح کنیم. فقط گاهی از دو مورد استثنایی استفاده می‌کنیم. اگر عدد مثبت مانند δ وجود داشته باشد که $[a, a+\delta)$ در دامنه تابع f قرار گیرد. می‌توانیم در (۱.۴)، h را به مقادیر مثبت محدود کنیم که در این صورت، ”حد یک‌طرفه“ به این معنی است که فقط مقادیر مثبت h در نظر گرفته می‌شود. مقدار

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

را در صورت وجود، مشتق راست تابع f در نقطه a می‌نامیم و با نماد $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم. به‌طور مشابه

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

را در صورت وجود، مشتق چپ تابع f در نقطه a می‌نامیم و با نماد $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.
لذا با توجه به مباحث فوق ملاحظه می‌شود تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است هرگاه مشتق چپ و راست f در نقطه a موجود و برابر باشند.

مثال ۱.۲.۴. [مشتق تابع خطی] نشان دهید مشتق تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = ax + b$ تعریف شده است برابر $f'(x) = a$ است.

حل: با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a.$$

یک حالت خاص مثال ۱.۲.۴ بیان می‌کند مشتق هر تابع ثابت برابر صفر است.

مثال ۲.۲.۴. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را به صورت $f(x)=ax^n$ در نظر بگیرید که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$. نشان دهید مشتق تابع f در نقطه $x=x_0$ برابر $f'(x_0)=anx_0^{n-1}$ است.

حل: با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(a)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{ax^n-ax_0^n}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} a(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+xx_0^{n-2}+x_0^{n-1}) = anx_0^{n-1} \end{aligned}$$

مثال ۳.۲.۴. فرض کنید تابع f در شرایط زیر صدق کند

$$\text{(i)}\ \forall x,y,\ f(x+y)=f(x)f(y),\quad \text{(ii)}\ f'(0)=k,\quad \text{(iii)}\ f(0)\neq 0,$$

نشان دهید

$$\text{(i)}\ f(0)=1,\quad \text{(ii)}\ \forall x:\ f'(x)=kf(x).$$

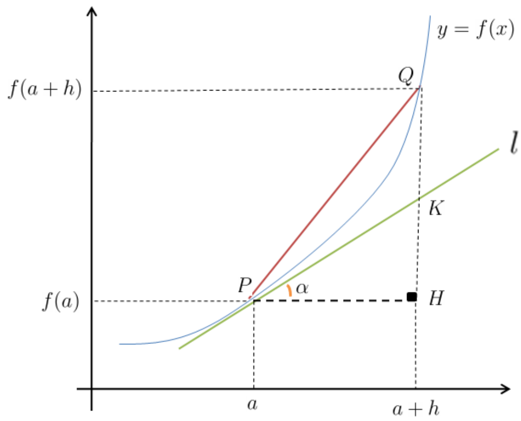
تعبیر هندسی مشتق

تابع $y=f(x)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\theta=\angle HPQ$ و $\alpha=\angle HPK$ که در آن P نقطه $(a,f(a))$ و Q نقطه $(a+h,f(a+h))$ هستند. همچنین، فرض کنید l خط مماس بر f در نقطه P باشد (شکل ۱.۴ را ببینید). در این صورت

$$m_{\overline{PQ}}=\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\overline{QH}}{\overline{PH}}=\tan\theta.$$

حال اگر $h\to 0$ آن‌گاه $a+h$ به a و در نتیجه Q به P نزدیک می‌شود. لذا وتر $\overline{PQ}$ به سمت خط مماس l نزدیک می‌شود. به عبارت دیگر $\alpha\to\theta$. لذا داریم

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{\theta\to\alpha}\tan\theta=\tan\alpha=l \text{ شیب خط}.$$



شکل ۱.۴

لذا $f'(a)$ شیب خط مماس بر منحنی $f(x)$ در نقطه a است. بنابراین، به لحاظ هندسی، مشتق در یک نقطه عبارت است از شیب خط مماس در آن نقطه. ازاین‌رو مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه معادل است با وجود خط مماس یکتا در آن نقطه.

مثال ۴.۲.۴. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد. هرگاه a یک عدد حقیقی باشد آن‌گاه $P(x)$ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

اگر $l(x) = m(x-a)+b$، نشان دهید خط مستقیم $y = l(x)$ بر نمودار $y = P(x)$ در نقطه a مماس است هرگاه

$$P(x) - l(x) = (x-a)^2 Q(x),$$

که در آن $Q(x)$ یک چندجمله‌ای است.

۳.۴ قواعد مشتق‌گیری

اگر بنا باشد برای محاسبه هر مشتق از تعریف استفاده کنیم، حساب دیفرانسیل و انتگرال موضوع عذاب آوری خواهد شد. برای اجتناب از این امر، تعدادی قاعده مشتق‌گیری کلی بیان می‌شود. با استفاده از این قواعد می‌توان مشتق ترکیب‌های پیچیده توابع را به‌آسانی از مشتق توابع مقدماتی که این توابع را ساخته‌اند، محاسبه کرد.

قضیه ۱.۳.۴. مشتق‌پذیری مستلزم پیوستگی است.

برهان. با توجه به اینکه f در a مشتق‌پذیر است، می‌توان نوشت

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)] = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x-a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) = 0$$

لذا $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

عکس قضیه قبل برقرار نیست ($f(x) = |x|$).

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید توابع f و g در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت

(الف) توابع $f \pm g$ در نقطه a مشتق‌پذیر هستند و

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a);$$

(ب) تابع fg در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

(پ) تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

نکته.

$$(f_1f_2\dots f_n)'=f_1'f_2\dots f_n+f_1f_2'\dots f_n+\dots+f_1f_2\dots f_n'.$$

نکته. با استفاده از تعریف مشتق و قضایای فوق داریم

$$\begin{aligned}
&p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \Rightarrow p'(x)=a_1+\dots+na_nx^{n-1},\\
&(\sin x)'=\cos x,\\
&(\cos x)'=-\sin x,\\
&(\tan x)'=\sec^2 x=1+\tan^2 x,\\
&(\cot x)'=-\csc^2 x=-(1+\cot^2 x),\\
&(\sec x)'=\sec x\tan x.
\end{aligned}$$

مثال ۱.۳.۴. اگر $f(x)=|x^2-4x|+\sqrt{x^2+2x+1}$. مقادیر $f'_+(-1)$، $f'(2)$ و $f'_-(4)$ را محاسبه کنید.

مثال ۲.۳.۴. پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

مثال ۳.۳.۴. تابع $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{Q}^c,\end{cases}$ در چه نقاطی مشتق‌پذیر است.

مشتق توابع مرکب

یکی از اساسی ترین قضایای مشتق، بیان مشتق‌پذیر بودن ترکیب دو تابع و دستور محاسبه مشتق ترکیب است. این قضیه به قضیه زنجیری معروف است.

قضیه ۳.۳.۴ (قاعده زنجیری)**.** فرض کنید $f : S \to \mathbb{R}$ و $g : T \to \mathbb{R}$ دو تابع، a نقطه درونی از S و $f(a)$ نقطه درونی از T باشد. اگر f در نقطه a و g در نقطه $f(a)$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه $g \circ f$ در نقطه a مشتق‌پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

مثال ۴.۳.۴. تابع $h(x) = (x^2 + x + 1)^{10}$ مشتق‌پذیر است زیرا از ده بار ضرب کردن چندجمله‌ای $x^2 + x + 1$ در خودش بدست آمده است و یک چندجمله‌ای درجه ۲۰ است. فرض کنید $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = x^{10}$. در این صورت $h = g \circ f$. لذا با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$h'(x) = 10(x^2 + x + 1)^9(2x + 1).$$

مثال ۵.۳.۴. تابع $h(x) = \sin(\cos x)$ مشتق‌پذیر است زیرا ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ است و بنا بر قاعده زنجیری داریم

$$h'(x) = \cos(\cos x)(-\sin x).$$

مثال ۶.۳.۴. در تابعی مشتق‌پذیر مانند f، می‌دانیم $f(0) = 0$ و $f'(0) = 2$. می‌خواهیم مشتق تابع $h = f \circ f$ را در نقطه صفر بدست آوریم. بنا بر قاعده زنجیری داریم

$$h'(0) = f'(f(0))f'(0) = [f'(0)]^2 = 4.$$

نمادگذاری لایبنیتس

چون توابع را می‌توان به صورت‌های مختلف نوشت، سودمند است که نمادهای دیگری هم برای مشتق داشته باشیم. لایبنیتس برای بیان مشتق نمادی ابداع کرد که برای محاسبات طولانی بسیار سودمند است. فرض کنید $y = f(x)$ و f مشتق‌پذیر باشد. لایبنیتس برای نمایش $f'(x)$ از نماد $\dfrac{dy}{dx}$ استفاده کرد که در آن نماد x در مخرج نمایشگر متغیر و نماد y در صورت، نمایشگر مقدار تابع است. همچنین با این نمادگذاری، مقدار مشتق در نقطه

$x=a$ با $\frac{dy}{dx}(a)$، $\frac{dy}{dx}\Big|_a$ یا $\frac{dy(f(a))}{dx(a)}$ نمایش داده می‌شود.

با استفاده از نمادگذاری لایبنیتس، نتیجه قاعده زنجیره‌ای به شکل یادماندنی در می‌آید. اگر $y=f(x)$ و $z=g(y)$ آن‌گاه $z=(g\circ f)(x)$. بنابراین قاعده زنجیری را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{dz(g(b))}{dx(a)}=\frac{dz(g(b))}{dy(b)}\cdot\frac{dy(b)}{dx(a)},$$

یا

$$\frac{dz}{dx}(a)=\frac{dz}{dy}(b)\cdot\frac{dy}{dx}(a),$$

که به اختصار می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

به این شکل، وقتی تعداد ترکیب‌ها زیاد و طولانی است، پیگیری محاسبات سریعتر می‌شود ولی باید همواره در ذهن داشت که $\frac{dz}{dy}$ و $\frac{dy}{dx}$ در نقاط مختلف مطرح هستند. اولی در a و دومی در $b=f(a)$ در حالی که $\frac{dz}{dx}$ در نقطه a مطرح است.

با استفاده از این نمادگذاری ممکن است این سوال پیش آید که چرا قاعده زنجیری با حذف $dy(b)$ از صورت و مخرج نتیجه نمی‌شود؟ این کار دو اشکال دارد: اول اینکه تا مشتق‌پذیری $g\circ f$ در نقطه a ثابت نشود، عبارت $\frac{dz(g(b))}{dx(a)}$ معنی ندارد، و دوم اینکه ممکن است $dy(b)$ صفر باشد که در این صورت حذف آن از صورت و مخرج مجاز نیست.

مثال ۷.۳.۴. مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\ f(x)=\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{x}}}},\quad \text{(ii)}\ g(x)=\sin^{۲}\left(\tfrac{۱}{۲}\cos x^{۳}\right).$$

مشتق توابع معکوس

فرض کنید I یک بازه و f تابعی پیوسته و صعودی (نزولی) اکید باشد. در این صورت f^{-1} نیز پیوسته است. در این‌جا حالتی را در نظر می‌گیریم که f مشتق‌پذیر است و مشتق آن در سراسر بازه I مثبت یا منفی است.

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید I یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در نقاط درونی I مشتق‌پذیر است و مشتق آن همه جا مثبت یا همه جا منفی است. در این صورت، تابع معکوس f، یعنی f^{-1}، نیز در همه نقاط درونی دامنه تعریفش مشتق‌پذیر است و به‌ازای هر نقطه درونی از f^{-1} مانند b که $b = f(a)$، داریم

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

با استفاده از نمادگذاری لایبنیتس، دستور فوق را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\frac{dx}{dy}(b) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(a)},$$

که گاهی به‌طور خلاصه‌تر به صورت

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1},$$

نوشته می‌شود.

مثال ۴.۳.۸. تابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. به وضوح f مشتق‌پذیر است و $f'(x) = nx^{n-1}$. برای $x \in \mathbb{R}^+$ داریم $f'(x) > 0$ اگر $n > 0$ و $f'(x) < 0$ اگر $n < 0$. بنابرای تابع $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ که به صورت $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ تعریف می‌شود بنا به قضیه بالا مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(x^n) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{n}x^{1-n},$$

اگر به‌جای x^n مقدار x را جایگزین کنیم، داریم

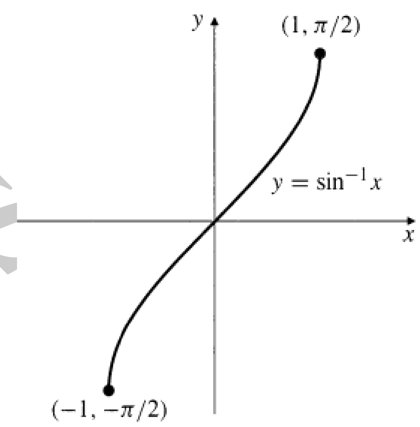
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x^{\frac{1}{n}})} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

مثال ۹.۳.۴. فرض کنید $f(x) = ۱ + ۲x^۳$. مطلوبست محاسبه $(f^{-۱})'(x)$.

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

توابع مثلثاتی، متناوب هستند و بنابراین یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر نیستند. در این بخش، تحدید این توابع را برای بدست آوردن معکوس آن‌ها در نظر می‌گیریم.

تابع $\sin$ را در بازه $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ در نظر بگیرید. در این صورت، معکوس آن که با $\sin^{-۱}$ یا $\arcsin$ نشان می‌دهیم، پیوسته است. نمودار $\sin^{-۱}$ در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. این نمودار عبارت است از بازتاب نمودار $y = \sin x$ نسبت به خط $y = x$. قلمرو $\sin^{-۱}$ برابر $[-۱, ۱]$ و برد آن برابر $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ است.



شکل ۲.۴ نمودار آرک سینوس

با توجه به اینکه مشتق سینوس روی بازه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ مثبت است، تابع سینوس در این بازه صعودی و در نتیجه یک به یک است. بنابراین، $\sin^{-۱}$ روی $(-۱, ۱)$ مشتق‌پذیر است. از $\sin(\sin^{-۱} x) = x$ و با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\sin'(\sin^{-۱} x) \cdot (\sin^{-۱})'(x) = ۱ \Rightarrow \cos(\sin^{-۱} x) \cdot (\sin^{-۱})'(x) = ۱,$$

اگر x در بازه $(-۱, ۱)$ باشد آن‌گاه $\sin^{-۱}$ در بازه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ است و در نتیجه

$$\cos(\sin^{-۱} x) = \sqrt{۱ - x^۲}.$$

لذا

$$(\sin^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}.$$

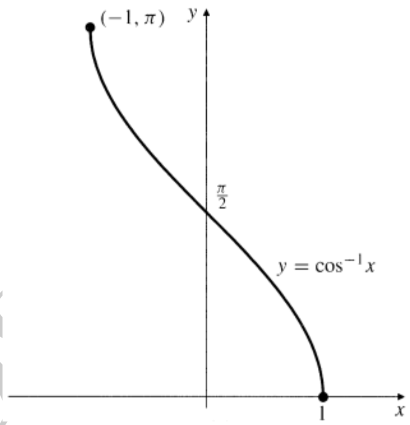
از طرفی داریم

$$\sin^{-۱} x + \cos^{-۱} x = \frac{\pi}{۲},$$

بنابراین

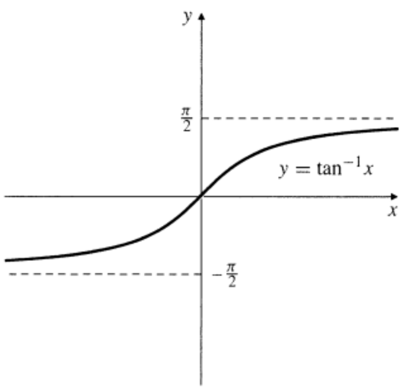
$$(\cos^{-۱})'(x) = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}.$$

نمودار تابع $\cos^{-۱}$ در شکل ۳.۴ نشان داده شده است.



شکل ۳.۴ نمودار آرک کسینوس

تابع معکوس تانژانت را با روشی مشابه تابع معکوس سینوس تعریف می‌کنیم. ابتدا قلمرو تانژانت را به بازه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ محدود می‌کنیم که بر آن یک به یک باشد. معکوس تابع $\tan$ را با $\tan^{-۱}$ یا $\arctan$ نشان می‌دهیم. قلمرو $\tan^{-۱}$ کل خط حقیقی و برد آن بازه $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ است. نمودار $\tan^{-۱}$ در شکل ۴.۴ نشان داده شده است. با توجه به اینکه $\tan' x = ۱ + \tan^۲ x$، قضیه بالا مشتق‌پذیری $\tan$ را نتیجه می‌دهد. همچنین، اگر از دو



شکل ۴.۴ نمودار آرک تانژانت

طرف تساوی $\tan(\tan^{-1}x)=x$ با استفاده از قاعده زنجیری مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$(\tan^{-1})'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

با توجه به $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ داریم

$$(\cot^{-1})'(x)=\frac{-1}{1+x^2}.$$

مثال ۱۰.۳.۴. به‌ازای هر عدد حقیقی x فرض کنید $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$.

(الف) $f'(x)$ را محاسبه و ساده کنید.

(ب) نقاطی که در آن f پیوسته و f' مشتق‌پذیر است را مشخص کنید.

(پ) با استفاده از نتایج (الف) و (ب) نمودار f را رسم کنید.

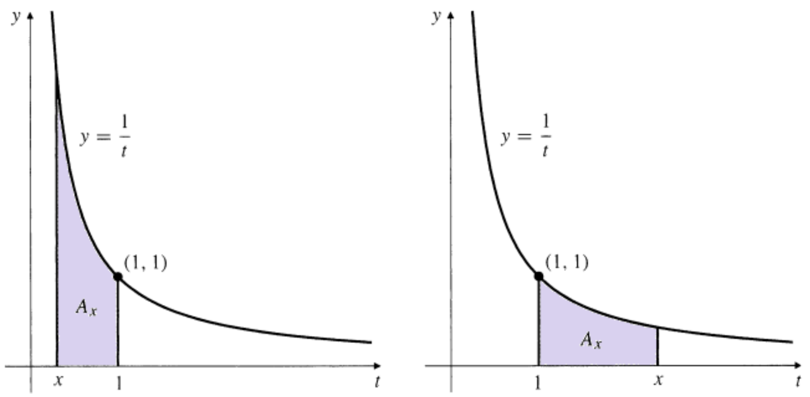
مثال ۱۱.۳.۴. نشان دهید به‌ازای هر $x>-1$ داریم $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4}$.

مثال ۱۲.۳.۴. نشان دهید تابع $f(x)=x\sec x$ بر $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ یک به یک است. قلمرو f^{-1} را بیابید. سپس، مقدار $(f^{-1})'(0)$ را محاسبه کنید.

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

در این قسمت، تابع $\ln x$ به‌نام لگاریتم طبیعی x را تعریف می‌کنیم. سپس مشتق آن را بدست آورده و با استفاده از آن مشتق نمایی‌ها و لگاریتم‌های کلی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۴. به‌ازای $x > ۰$، A_x را مساحت ناحیه مسطح محدود به منحنی $y = \frac{۱}{t}$، محور tها و خطوط قائم $t = ۱$ و $t = x$ در نظر بگیرید.



شکل ۵.۴ اگر $x \geq ۱$، $\ln x = A_x$ اگر $۰ < x < ۱$، $\ln x = -A_x$

تابع $\ln x$ به صورت زیر تعریف می‌شود

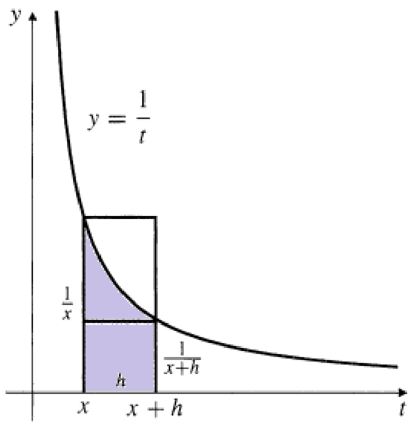
$$\ln x = \begin{cases} A_x, & x \geq ۱, \\ -A_x, & x < ۱. \end{cases}$$

این تعریف ایجاب می‌کند $\ln ۱ = ۰$. اگر $x > ۱$، $\ln x > ۰$. اگر $۰ < x < ۱$، $\ln x < ۰$. همچنین $\ln$ یک تابع یک به یک است.

قضیه ۵.۳.۴. اگر $x > ۰$ آن‌گاه

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{۱}{x}.$$

برهان. به‌ازای $x > ۰$ و $h > ۰$ مقدار $\ln(x+h) - \ln x$ بیانگر مساحت ناحیه مسطح محدود به $y = \frac{۱}{t}$، $y = ۰$ و خطوط قائم $t = x$ و $t = x + h$ است.



شکل ۶.۴

اگر این مساحت را با مساحت دو مستطیل مشخص شده در شکل ۶.۴ مقایسه کنیم آنگاه

$$\frac{h}{x+h} < \text{مساحت سایه‌دار} = \ln(x+h) - \ln x < \frac{h}{x},$$

بنابراین خارج قسمت نیوتن برای $\ln x$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x},$$

اگر h از راست به صفر نزدیک شود آن‌گاه

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد اگر $0 < x + h < x$ آن‌گاه

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x},$$

لذا داریم

$$\frac{d}{dx} \ln x = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$

تابع نمایی

تابع $\ln x$ بر قلمرو خود، یعنی بازه $(۰,+\infty)$ یک به یک است. ازاین‌رو، بر این بازه معکوس دارد. معکوس آن‌را با e^x نشان می‌دهیم. لذا

$$y=e^x \Longleftrightarrow x=\ln y\ (y>۰),$$

و در نتیجه

$$(e^x)'=e^x.$$

نکته. فرض کنید u تابعی از x باشد. در این صورت، با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u},\quad (e^u)'=u'e^u$$

نکته. با توجه به تعریف تابع نمایی، a^x را می‌توان به صورت $a^x=e^{x\ln a}$ تعریف کرد که در آن $a>۰$ و x یک عدد حقیقی دلخواه است. لذا

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=a^x\ln a.$$

همچنین، می‌توان قاعده کلی برای x^a که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه و $x>۰$ به صورت زیر بدست آورد

$$(x^a)'=(e^{a\ln x})'=ax^{a-۱}.$$

نکته.

$$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}.$$

مثال ۱۳.۳.۴. نشان دهید $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{۱}{x}$.

مثال ۱۴.۳.۴. مشتق توابع $f(x)=\ln|\cos x|$ و $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^۲+۱})$ را بیابید. جواب‌ها را تا حد امکان ساده کنید.

مثال ۱۵.۳.۴. با فرض $a>۰$، معادله $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=a$ را حل کنید. در عبارت سمت چپ معادله، سه نقطه به‌این معنی است که نما به جایی ختم نمی‌شود.

مثال ۱۶.۳.۴. فرض کنید $F_{A,B}(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$. نشان دهید

$$\frac{d}{dx}F_{A,B}(x) = F_{A+B,B-A}(x).$$

مشتق‌گیری لگاریتمی

فرض کنید بخواهیم مشتق یک تابع به صورت $[f(x)]^{g(x)}$ که در آن $f(x) > ۰$ را محاسبه کنیم. با توجه به اینکه متغیر هم در پایه و هم در نما ظاهر شده است نمی‌توان از روش‌های قبلی استفاده کرد. برای محاسبه مشتق این نوع توابع به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$y = [f(x)]^{g(x)} \Longleftrightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$$
$$\Longleftrightarrow y' = [f(x)]^{g(x)} \Big(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \Big)$$

مثال ۱۷.۳.۴.

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow y' = x^x (\ln x + ۱)$$
$$y = (\sin x)^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \ln \sin x \Rightarrow y' = (\sin x)^{\ln x} \Big(\frac{\ln \sin x}{x} + \cot x \ln x \Big)$$

مثال ۱۸.۳.۴. مشتق هر یک از توابع زیر را بیابید.

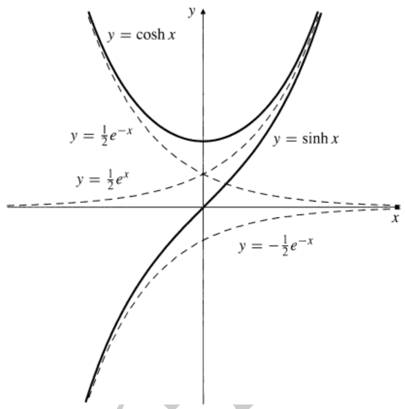
$$\text{(i)}\ f(x) = \frac{(x+۱)(x+۲)(x+۳)}{x+۴}, \quad \text{(ii)}\ g(x) = \sqrt{(x+۱)(x^۲+۱)(x^۳+۱)},$$
$$\text{(iii)}\ h(x) = \frac{(x^۲-۱)(x^۲-۲)(x^۲-۳)}{(x^۲+۱)(x^۲+۲)(x^۲+۳)}, \quad h'(۱), h'(۲) = ?$$

توابع هذلولوی

هر تابع معین روی خط اعداد حقیقی را می‌توان (به‌طور یکتا) به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بیان کرد. توابع هذلولوی $\cosh x$ و $\sinh x$ به‌ترتیب توابع زوج و فردی هستند که مجموعشان تابع نمایی e^x است.

تعریف ۲.۳.۰۴. به‌ازای هر عدد حقیقی x، توابع $\cosh x$ و $\sinh x$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲}.$$

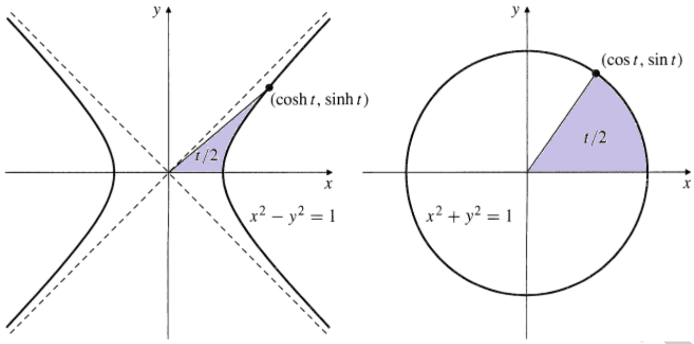


شکل ۷.۴

لازم به ذکر است توابع $\cos$ و $\sin$ را توابع مستدیر می‌نامند زیرا به‌ازای هر t، نقطه $(\cos t, \sin t)$ روی دایره به معادله $x^۲ + y^۲ = ۱$ قرار دارد. به‌همین ترتیب، توابع $\cosh$ و $\sinh$ را توابع هذلولوی می‌نامند زیرا نقطه $(\cosh t, \sinh t)$ روی هذلولوی قائم به معادله $x^۲ - y^۲ = ۱$ قرار دارد (شکل ۸.۴).

نکته. به‌ازای هر عدد حقیقی t داریم $\cosh^۲ t - \sinh^۲ t = ۱$.

بر خلاف حالت مربوط به توابع مستدیر، تعبیری از t بر حسب طول قوس یا زاویه وجود ندارد. ولی مساحت قطاع هذلولوی محصور به $y = ۰$، هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ و شعاع از مبدأ به $(\cosh t, \sinh t)$ برابر $\frac{t}{۲}$ واحد مربع است. همچنین مساحت قطاع مستدیر محدود به $y = ۰$، دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ و شعاع از مبدأ به $(\cos t, \sin t)$ نیز مساوی $\frac{t}{۲}$ واحد مربع است.



شکل ۸.۴

نکته. مشتق توابع هذلولوی به صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
(\sinh x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{۲}\right)' = \cosh x,\\
(\cosh x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{۲}\right)' = \sinh x,\\
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{۱}{\cosh^{۲} x},\\
(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = -\frac{۱}{\sinh^{۲} x}.
\end{aligned}
$$

نکته. روابط بین توابع مثلثاتی و هذلولوی به صورت زیر است

$$
\begin{aligned}
\cosh(ix) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲} = \cos x,\\
\cos(ix) &= \cosh(-x) = \cosh x,\\
\sinh(ix) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲} = i \sin x,\\
\sin(ix) &= \frac{۱}{i} \sinh(-x) = i \sinh x.
\end{aligned}
$$

توابع معکوس هذلولوی

توابع $\sinh x$ و $\tanh x$ بر تمام خط اعداد حقیقی صعودی هستند. لذا یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیرند. معکوس آن‌ها را به‌ترتیب با $\sinh^{-۱} x$ و $\tanh^{-۱} x$ نشان می‌دهیم.

بنابراین

$$y = \sinh x \Longleftrightarrow x = \sinh^{-1} y,$$
$$y = \tanh x \Longleftrightarrow x = \tanh^{-1} y.$$

مثال ۱۹.۳.۴. توابع $\sinh^{-1} x$ و $\tanh^{-1} x$ را بر حسب لگاریتم‌ها بیان کنید.

حل: فرض کنید $y = \sinh^{-1} x$. در این صورت داریم

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} \Rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0,$$

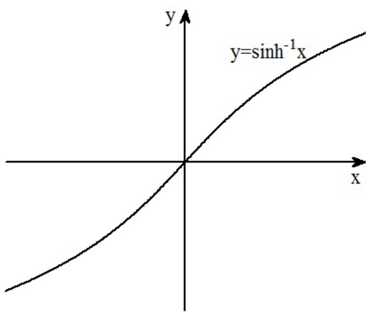
با حل معادله درجه دوم فوق داریم

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1},$$

با توجه به اینکه $x < \sqrt{x^2 + 1}$ و e^y نمی‌تواند منفی باشد، لذا بایستی داشته باشیم

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

بنابراین $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ و ازاین‌رو $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.



شکل ۹.۴ نمودار $y = \sinh^{-1} x$

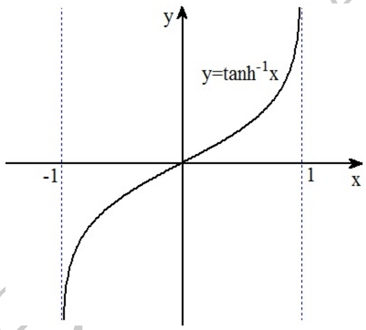
بار دیگر فرض کنید $y = \tanh^{-1} x$. در این صورت داریم

$$x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad (-1 < x < 1) \Longrightarrow xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$
$$\Longrightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x} \Longrightarrow y = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1 + x}{1 - x}\Big).$$

بنابراین

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1 + x}{1 - x}\Big), \quad |x| < 1.$$

اما برای تعریف معکوس $\cosh$، ابتدا قلمروش را محدود و مقدار اصلی آن‌را به‌صورت زیر



شکل ۱۰.۴ نمودار $y = \tanh^{-1} x$

تعریف می‌کنیم

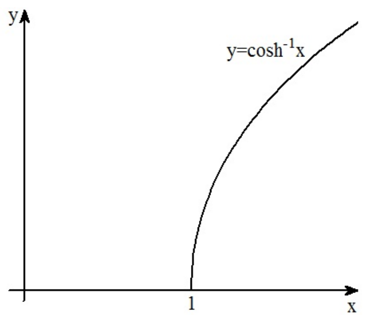
$$Cosh\ x = \cosh x, \quad x \geq 0,$$

در این صورت، معکوس $\cosh$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$y = \cosh^{-1} x \Longleftrightarrow x = Cosh\ y \Longleftrightarrow x = \cosh y \quad (y \geq 0).$$

می‌توان نشان داد

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1.$$



شکل ۱۱.۴ نمودار $y = \cosh^{-۱} x$

مشتق توابع معکوس هذلولوی

با توجه به بحث‌های مطرح شده در این قسمت داریم

$$y = \sinh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱}) \Rightarrow y' = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۱}},$$
$$y = \cosh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}) \Rightarrow y' = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - ۱}}, \quad |x| \geq ۱,$$
$$y = \tanh^{-۱} x = \frac{۱}{۲} \ln\left(\frac{۱ + x}{۱ - x}\right) \Rightarrow y' = \frac{۱}{۱ - x^۲}, \quad |x| < ۱.$$

تبصره. تابع $\coth x$ به‌صورت

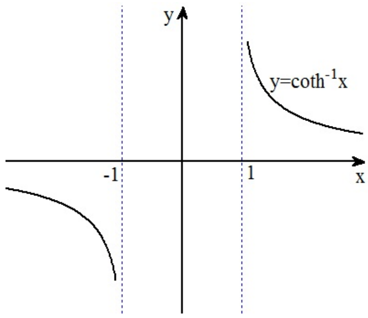
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

تعریف می‌شود. دامنه این تابع $\mathbb{R} - \{۰\}$ و برد آن $(-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$ است. این تابع یک به یک است و می‌توان نشان داد

$$\coth^{-۱} x = \frac{۱}{۲} \ln\Big(\frac{x + ۱}{x - ۱}\Big), \quad |x| > ۱.$$

بنابراین

$$\left(\coth^{-۱} u\right) = \frac{u'}{۱ - u^۲}, \quad |u| > ۱.$$



شکل ۱۲.۴ نمودار $y = \coth^{-1} x$

مشتق توابع پارامتری

یک دستگاه به شکل $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ که در آن g و h توابعی بر حسب پارامتر t هستند، دستگاه معادلات پارامتری می‌نامند و مشتق آن به صورت زیر بدست می‌آید

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

اگر پارامتر t بین x و y حذف شود ممکن است معادله دکارتی منحنی توصیف شده توسط روابط پارامتری بدست آید. از نظر فیزیکی، اگر t زمان باشد، معادلات بالا مکان نقطه متحرک M را نشان می‌دهند . با حذف t، در صورت امکان، معادله مسیر بدست می‌آید.

مثال ۲۰.۳.۴. مشتق توابع زیر را بیابید.

$$\text{(i) } f(x) = \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad , \quad \text{(ii) } g(x) = \begin{cases} x = \tan^{-1} t, \\ y = \sec t. \end{cases}$$

۴.۴ مشتق‌گیری ضمنی

معادله $F(x,y) = ۰$ را در نظر بگیرید. اگر تابع $y = f(x)$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر x از قلمرو f، $F(x, f(x)) = ۰$ آن‌گاه $y = f(x)$ یا $F(x,y) = ۰$ را یک تابع ضمنی از x می‌نامند. یک معادله به صورت $F(x,y) = ۰$ ممکن است بیش از یک تابع ضمنی را تعریف کند یا هیچ تابعی را تعریف نکند. به عنوان مثال، معادله $F(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲۵ = ۰$ حداقل دو تابع $y = \pm\sqrt{۲۵ - x^۲}$ را در بازه $[-۱, ۱]$ تعریف می‌کند در حالی‌که معادله $F(x,y) = x^۲ + y^۲ + ۱ = ۰$ هیچ تابعی را تعریف نمی‌کند.

مثال ۱.۴.۴. معادله $y^۲ = x$ معرف دو تابع مشتق‌پذیر از x است. در این حالت آن‌ها را به‌طور صریح می‌شناسیم. این توابع عبارتند از $y_۱ = \sqrt{x}$ و $y_۲ = -\sqrt{x}$ که مشتقات آن‌ها به‌ازای $x > ۰$ با

$$y'_۱ = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}, \quad y'_۲ = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}},$$

تعریف شده‌اند ولی شیب منحنی $y^۲ = x$ در نقطه (x,y) صادق در معادله را می‌توان بدون حل معادله نسبت به y یافت. بدین منظور، از طرفین معادله $y^۲ = x$ با فرض اینکه y مشتق‌پذیر است، مشتق می‌گیریم:

$$۲yy' = ۱ \Longrightarrow y' = \frac{۱}{y},$$

ملاحظه می‌شود که این عبارت با مشتق‌هایی که در بالا برای هر دو جواب صریح $y_۱ = \sqrt{x}$ و $y_۲ = -\sqrt{x}$ مطابقت دارد:

$$y'_۱ = \frac{۱}{۲y_۱} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}, \quad y'_۲ = -\frac{۱}{۲y_۲} = -\frac{۱}{۲\sqrt{x}}.$$

مثال ۲.۴.۴. شیب دایره $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را در نقطه $(۳, -۴)$ بیابید.

تبصره (یافتن y' به وسیله مشتق‌گیری ضمنی)**.**

(الف) از طرفین معادله $F(x,y)=0$ با توجه به اینکه y تابعی از x است، با استفاده از قاعده زنجیری مشتق بگیرید.

$$F_x + F_y y' = 0;$$

(ب) جملات را دسته بندی کرده، y' را در یک طرف معادله نگه داشته و با تقسیم بر ضریب آن، نسبت به y' حل کنید

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

نکته. محاسبه مشتق به‌طور ضمنی متضمن خطرات ضعیفی است. وقتی برای مشتق‌گیری از یک معادله شامل y نسبت به x از قاعده زنجیری استفاده می‌شود، فرض بر این است معادله، y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می کند در حالی‌که لزومی ندارد همواره چنین باشد. معادله $x^2+y^2=k$ را در نظر بگیرید. با مشتق‌گیری ضمنی داریم $y'=-\frac{x}{y}$. این فرمول شیب منحنی را در هر نقطه از منحنی که $y\neq 0$، نتیجه می‌دهد. به‌ازای $k>0$، معادله فوق نمایش دایره به مرکز مبدأ و شعاع $\sqrt{k}$ است. این دایره جز در نقطه‌ای که محور xها را قطع می کند، شیب متناهی دارد. اگر $k=0$، معادله نمایش فقط یک نقطه است یعنی مبدأ. مفهوم شیب یک نقطه بی معنی است. به‌ازای $k<0$، هیچ نقطه حقیقی که مختصاتش در معادله فوق صدق کند وجود ندارد. لذا y' در اینجا بی معنی است.
نکته آن است که که محاسبه y' از یک معادله مفروض با مشتق‌گیری ضمنی مستلزم آن نیست که y' نمایش شیب است.

تبصره. بخشی از نمودار $F(x,y)=0$ که در مجاورت (x_0,y_0) است نمودار تابعی است از x که در x_0 مشتق‌پذیر است مشروط بر اینکه $F(x,y)$ یک تابع هموار باشد و

$$\frac{d}{dy}F(x_0,y)\Big|_{y=y_0} \neq 0.$$

شرط فوق در دایره $x^2+y^2=k$ (که در آن $k>0$) بیان می‌کند $2y_0\neq 0$، که شرط وجود مشتق $-\frac{x}{y}$ در (x_0,y_0) است.

مثال ۳.۴.۴. معادله خط مماس بر $x^2+xy+2y^3=4$ را در نقطه $(-2,1)$ بیابید.

مثال ۴.۴.۴. نشان دهید که به‌ازای ثابت‌های a و b، منحنی‌های $x^۲ - y^۲ = a$ و $xy = b$ در زوایای قائمه متقاطع‌اند.

۵.۴ مشتق مراتب بالاتر

تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ مفروض است. چنانچه از $f'(x)$ مشتق بگیریم، تابع جدیدی بدست می‌آید که آن‌را مشتق مرتبه دوم f می‌نامیم و با نماد $f''(x)$ یا $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ نمایش می‌دهیم. اگر فرایند مشتق گرفتن را ادامه دهیم، پس از n بار مشتق گرفتن از f، مشتق nام f بدست می‌آید که آن‌را با نماد $f^{(n)}(x)$ یا $\frac{d^ny}{dx^n}$ نمایش می‌دهیم.
گاهی پس از چند بار مشتق گرفتن از یک تابع می‌توان قاعده‌ای را برای مشتق nام f بدست آورد که درستی حدس بایستی با استفاده از استقرای ریاضی ثابت شود.

تبصره (فرمول لایبنیتس)**.** فرض کنید توابع f و gتا مرتبه nام مشتق‌پذیر باشند. در این صورت داریم

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{۱} f^{(n-۱)}g' + \ldots + \binom{n}{n-۱} f'g^{(n-۱)} + fg^{(n)}.$$

تبصره. مشتقات مراتب بالاتر تابع پارامتری $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ در صورتی‌که شرایط لازم موجود باشند، به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^۳},$$

و

$$\begin{aligned} \frac{d^۳y}{dx^۳} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^۲y}{dx^۲}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^۲y}{dx^۲}\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{g''(t)f'(t) - g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^۳}\right)\frac{۱}{f'(t)}. \end{aligned}$$

مثال ۱.۵.۴. فرض کنید a و $c > \circ$ اعداد حقیقی دلخواه بوده و تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}), & x > \circ \\ \circ, & x \leq \circ \end{cases}$ تعریف شود. شرایطی را تعیین کنید که

(الف) مشتق دوم f در همه نقاط موجود باشد.

(ب) مشتق دوم f در اطراف $x = \circ$ کراندار باشد.

(پ) f'' در همه نقاط پیوسته باشد.

مثال ۲.۵.۴. مشتق مرتبه nام توابع زیر را بیابید.

$$\text{(i) } y = \sin(ax+b), \quad \text{(ii) } y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{(iii) } y = x^{۲} e^{ax}, \quad \text{(iv) } y = x^{۲} \sin x.$$

تبصره. فرض کنید $y = f(x)$ تابعی یک به یک و مشتق‌پذیر باشد و $f'(x) \neq ۰$. در این صورت، $(f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)}$ یا

$$f'(x)(f^{-۱})'(f(x)) = ۱,$$

با مشتق گرفتن از طرفین نسبت به x داریم

$$f''(x)(f^{-۱})'(f(x)) + [f'(x)]^{۲}(f^{-۱})''(f(x)) = ۰,$$

بنابراین

$$(f^{-۱})''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^{۳}}.$$

مثال ۳.۵.۴. اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x^{۳} + x$ باشد، مطلوبست محاسبه $g''(۲)$.

۶.۴ کاربرد مشتق

دراین قسمت برخی از موارد استعمال مشتق (مانند یافتن بازه‌هایی که تابع صعودی یا نزولی است، یافتن اکسترمم‌های یک تابع، محاسبه حد توابع، یافتن تعداد ریشه‌های یک تابع و ...) را بررسی می‌کنیم.

۱.۶.۴ یکنوایی تابع

قضیه ۱.۶.۴. فرض کنید f در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) > ۰$، تابع f در $[a, b]$ صعودی اکید است.
- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) < ۰$، تابع f در $[a, b]$ نزولی اکید است.
- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) = ۰$، تابع f در $[a, b]$ تابع ثابت است.

اثبات این قضیه بعد از قضیه ۷.۶.۴ آورده شده است.

تبصره. عکس قضیه ۱.۶.۴ برقرار نیست. زیرا به عنوان مثال، $f(x)=x^۳$ صعودی اکید است در حالی که $f'(۰)=۰$.

تبصره. اگر در قضیه ۱.۶.۴، علامت‌های «$>$» و «$<$» را به‌ترتیب با «$\geq$» و «$\leq$» جایگزین کنیم، آن‌گاه f روی $[a,b]$ به‌ترتیب صعودی و نزولی است.

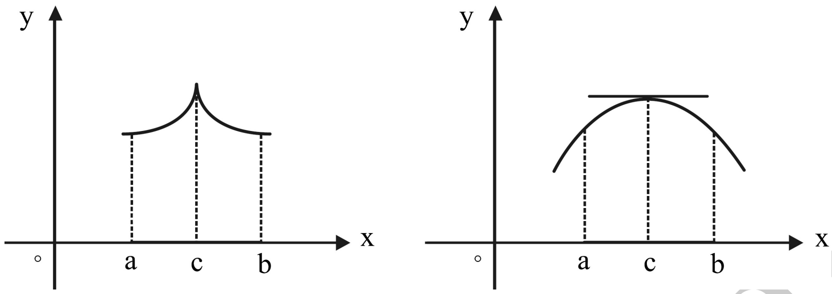
تبصره. اگر برای هر x در بازه‌ای مانند I داشته باشیم $f'(x)=g'(x)$ و $c\in I$ای وجود داشته باشد که $f(c)=g(c)$، آن‌گاه به ازای هر $x\in I$، داریم $f(x)=g(x)$.

مثال ۱.۶.۴. وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x$ را بررسی کنید.

۲.۶.۴ ماکزیمم و می‌نیمم یك تابع

تعریف ۱.۶.۴. فرض کنید c نقطه‌ای از دامنه تابع f باشد. تابع f در نقطه c ماکزیمم نسبی دارد هرگاه f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد و به ازای هر x از این همسایگی داشته باشیم $f(x)\leq f(c)$.

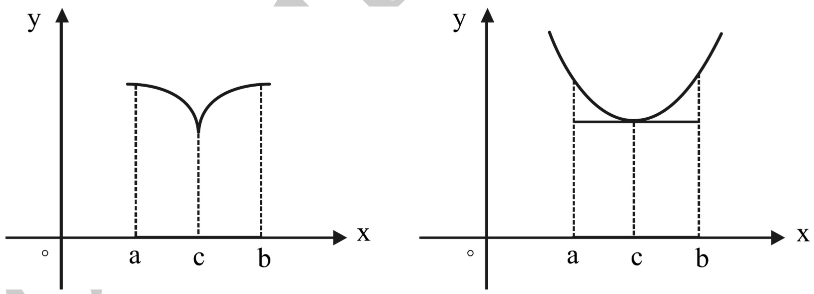
شکل ۱۳.۴ قسمتی از نمودار یك تابع را نشان می‌دهد که در c ماکزیمم نسبی دارد.



شکل ۱۳.۴

تعریف ۲.۶.۴. فرض کنید c نقطه‌ای از دامنه تابع f باشد. تابع f در نقطه c می‌نیمم نسبی دارد هرگاه f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد و به ازای هر x از این همسایگی داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$.

شکل ۱۴.۴ قسمتی از نمودار یك تابع را نشان می‌دهد که در c می‌نیمم نسبی دارد.
قضیه زیر در تعیین نقاطی که تابع f در آن‌ها اکسترمم نسبی دارد، به‌کار می‌رود.



شکل ۱۴.۴

قضیه ۲.۶.۴ (فرما). اگر تابع f در نقطه $c \in D_f$ اکسترمم نسبی داشته و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(c) = 0$.

برهان. فرض کنید c نقطه اکسترمم نسبی f باشد. چون f در این نقطه مشتق‌پذیر است، پس داریم

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

اکنون فرض کنید (فرض خلف) $f'(c) \neq 0$. بنابراین $f'(c)$ یا مثبت است یا منفی. اگر $f'(c) > 0$، آن‌گاه همسایگی مانند $N_\delta(c)$ از c وجود دارد به‌طوری که

$$\forall x \in N_\delta(c): \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0.$$

یعنی اگر $x < c$، آن‌گاه $f(x) < f(c)$ و اگر $x > c$، آن‌گاه $f(x) > f(c)$. بنابراین $f(c)$ نه ماکزیمم نسبی است و نه می‌نیمم نسبی؛ که این خلاف فرض است. پس $f'(c)$ نمی‌تواند مثبت باشد. به طریق مشابه ثابت می‌شود $f'(c)$ نمی‌تواند منفی باشد. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

تعبیر هندسی قضیه فرما این است که اگر f در c مشتق‌پذیر بوده و ماکزیمم و می‌نیمم نسبی داشته باشد نمودار $y = f(x)$ باید در نقطه $x = c$ خط مماس افقی داشته باشد.

تبصره. اگر f یك تابع مشتق پذیر باشد تنها مقادیری از x که f در آن‌ها می تواند ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد آن نقاطی هستند که در آن‌ها $f'(x) = 0$. اما ممکن است $f'(x)$ به ازای مقادیری از x صفر باشد ولی f در آن‌ها ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی نداشته باشد. به عبارت دیگر عکس قضیه فرما درست نیست. به عنوان مثال، تابع $f(x) = (x-3)^5$ را در نظر بگیرید. داریم $f'(x) = 5(x-3)^4$؛ در نتیجه $f'(3) = 0$. ولی به ازای $x < 3$، $f(x) < f(3)$ و به ازای $x > 3$، $f(x) > f(3)$. در نتیجه f در ۳ نه ماکزیمم نسبی دارد نه می‌نیمم نسبی.

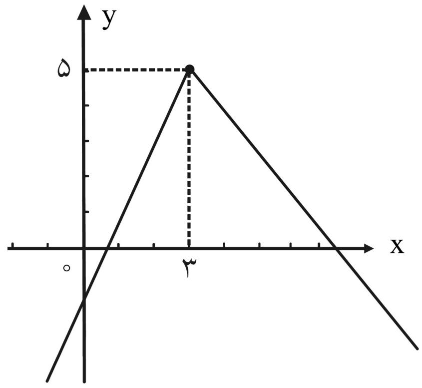
تبصره. ممکن است تابعی در نقطه‌ای ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، بدون این که در آن نقطه مشتق داشته باشد. به عنوان مثال تابع

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 3 \\ 8-x, & x > 3 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. نمودار این تابع در شکل ۱۵.۴ رسم شده است. f در $x = 3$ ماکزیمم نسبی دارد ولی چون $f'_-(3) = 2$ و $f'_+(3) = -1$، لذا $f'(3)$ وجود ندارد.

تبصره. اگر f در $x = c$ تعریف شده باشد، شرط لازم برای آن‌که f در c اکسترمم نسبی داشته باشد، این است که $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. اما این شرط کافی نیست.

تعریف ۳.۶.۴. نقطه $c \in D_f$ را یک نقطه بحرانی تابع f گویند هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.



شکل ۱۵.۴

مثال ۲.۶.۴. نقطه $x=\circ$ تنها نقطه بحرانی تابع $f(x)=|x|$ است، چون $f'(\circ)$ وجود ندارد. همچنین نقاط $x=\pm ۱$ نقاط بحرانی تابع $g(x)=x^{۳}-۳x$ هستند، چون $g'(۱)=$ $.g'(-۱)=\circ$

نقاط بحرانی کاندیدای اکسترمم نسبی هستند، برای مشخص شدن اینکه نقطه بحرانی کدام یک از انواع اکسترمم است، از آزمون‌های مشتق اول و مشتق دوم، که ذیلاً بیان می‌شود، استفاده می‌کنیم.

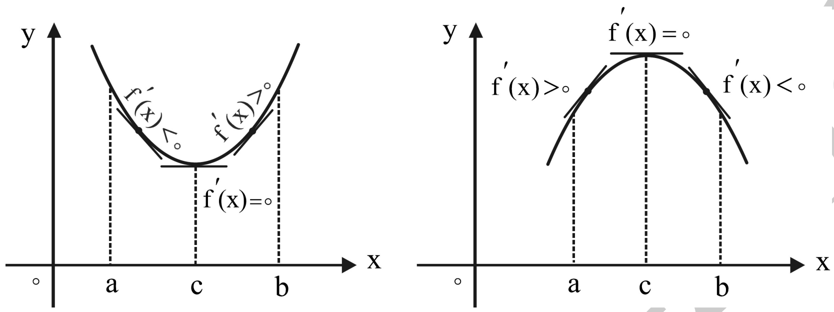
قضیه ۳.۶.۴ (آزمون مشتق اول برای شناسایی اکسترمم‌های نسبی)**.** فرض کنید f در نقطه بحرانی c پیوسته و در یک همسایگی از c، به‌جز احتمالاً در خود c، مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

- اگر در یک همسایگی چپ از c، f' مثبت و در یک همسایگی راست از c، f' منفی باشد، c یک نقطه ماکزیمم نسبی است.
- اگر در یک همسایگی چپ از c، f' منفی و در یک همسایگی راست از c، f' مثبت باشد، c یک نقطه می‌نیمم نسبی است.
- اگر f' در c تغییر علامت ندهد، آن‌گاه c ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی نیست.

برهان. ابتدا قسمت اول قضیه را ثابت می‌کنیم (قسمت دوم قضیه به‌طور مشابه ثابت می‌شود.). اگر f' در همسایگی چپ از c، مانند (a,c) مثبت باشد، بنا به قضیه ۱.۶.۴، تابع f روی $[a,c]$ صعودی اکید است. بنابراین برای هر $x\in[a,c)$ داریم $.f(x)<f(c)$ اگر f' در همسایگی راست از c، مانند (c,b) منفی باشد، بنا به قضیه ۱.۶.۴، تابع f روی $[c,b]$ نزولی اکید است. بنابراین برای هر $x\in(c,b]$ داریم $f(x)>f(c)$. در نتیجه بنا به

تعریف ماکزیمم نسبی، f در $x=c$ ماکزیمم نسبی دارد.
اکنون قسمت سوم قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر f' در $x=c$ تغییر علامت ندهد، f روی دامنه‌اش یا همیشه نزولی اکید است (اگر $f'(x)<\circ$ باشد) یا همیشه صعودی اکید (اگر $f'(x)>\circ$). بنابراین $f(c)$ نه ماکزیمم نسبی است نه می‌نیمم نسبی. □

در شکل ۱۶.۴، حالات مختلف قضیه ۳.۶.۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۶.۴

مثال ۳.۶.۴. ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $f(x)=۲x^۳-۱۵x^۲+۳۶x-۲۵$ را به‌دست بیاورید. همچنین بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی یا نزولی است، مشخص کنید.

مثال ۴.۶.۴. مثال ۳.۶.۴ را برای تابع

$$f(x) = \begin{cases} -۳x + ۵\,, & x \geq ۲ \\ x^{۲} - ۵\,, & x < ۲ \end{cases}$$

انجام دهید.

قضیه ۴.۶.۴ (آزمون مشتق دوم برای شناسایی اکسترمم‌های نسبی)**.** فرض کنید c نقطه بحرانی تابع f، $f'(c) = ۰$ و f' و f'' در یک همسایگی از c وجود داشته باشند. در این صورت:

- اگر $f''(c) < ۰$، آن‌گاه c یک نقطه ماکزیمم نسبی است.
- اگر $f''(c) > ۰$، آن‌گاه c یک نقطه می‌نیمم نسبی است.
- اگر $f''(c) = ۰$، آزمون بی‌نتیجه است.

برهان. ابتدا قسمت اول قضیه را ثابت می‌کنیم (قسمت دوم قضیه به‌طور مشابه ثابت می‌شود.). فرض کنید c نقطه بحرانی f با $f'(c) = ۰$ و $f''(c) < ۰$ باشد. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} ۰ > f''(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}. \end{aligned}$$

بنابراین یک همسایگی از c مانند (a,b) وجود دارد به‌طوری که به ازای هر x از این همسایگی داریم

$$\frac{f'(x)}{x-c} < 0.$$

این نشان می‌دهد که به ازای هر $x \in (a,c)$، داریم $f'(x) > 0$ و به ازای هر $x \in (c,b)$، داریم $f'(x) < 0$. در نتیجه بنا به قضیه ۳.۶.۴، نقطه c یک نقطه ماکزیمم نسبی است.
برای اثبات قسمت سوم قضیه، توابع مختلفی مثال می‌زنیم که برای آن‌ها $f''(c) = 0$، ولی c برای این توابع مختلف وضعیت متفاوتی داشته باشد. در واقع، $x = 1$ نقطه می‌نیمم نسبی برای تابع $f(x) = (x-1)^4$، ماکزیمم نسبی برای تابع $g(x) = -(x-1)^4$ است و این نقطه اکسترمم نسبی برای تابع $h(x) = (x-1)^3$ نیست. در حالی که داریم

$$f'(1) = f''(1) = g'(1) = g''(1) = h'(1) = h''(1) = 0.$$

□

مثال ۵.۶.۴. نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ را بیابید.

تعریف ۴.۶.۴. فرض کنید c و d نقاطی از دامنه تابع f باشند. c نقطه ماکزیمم مطلق تابع f است هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$. به‌طور مشابه، d نقطه می‌نیمم مطلق تابع f است هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \geq f(d)$.

اگر تابع f در a ماکزیمم یا می‌نیمم داشته باشد، گوییم f در a اکسترمم دارد.
یک تابع می‌تواند حداکثر یک اکسترمم مطلق داشته باشد، ولی این مقدار می‌تواند در نقاط بسیار رخ دهد. تابع $f(x) = \sin x$ دارای ماکزیمم مطلق است که در هر نقطه به شکل $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ رخ می‌دهد. البته لزومی ندارد یک تابع مقادیر اکسترمم مطلق داشته باشد. به عنوان مثال، تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وقتی x از راست به صفر نزدیک می‌شود به‌طور دلخواه بزرگ می‌گردد. لذا ماکزیمم مطلق متناهی ندارد. حتی یک تابع کراندار ممکن است مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق نداشته باشد. تابع $g(x) = x$ با دامنه بازه باز $(0,1)$

هیچ یک را ندارد. برد g نیز بازه $(۰,۱)$ است و بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد در این بازه وجود ندارد. البته اگر دامنه g را به بازه بسته $[۰,۱]$ توسیع دهیم، g هم ماکزیمم مطلق $g(۱)$ و هم می‌نیمم مطلق $g(۰)$ خواهد داشت.

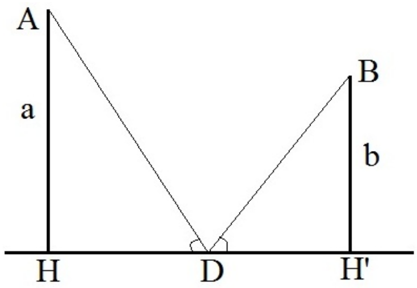
تبصره. برای پیدا کردن ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع f در بازه بسته $[a,b]$، ابتدا ماکزیمم و می‌نیمم‌های نسبی تابع را در این فاصله پیدا می‌کنیم سپس مقدار تابع را در نقاط a و b محاسبه و با ماکزیمم و می‌نیمم‌های نسبی مقایسه می‌کنیم. آن که از همه بزرگتر است ماکزیمم مطلق و آن که از همه کوچکتر است می‌نیمم مطلق f خواهد بود.

مثال ۶.۶.۴. تابع $f(x)=۳x-۲x^۲-\frac{۴}{۳}x^۳$ با $x\in[-۲,۲]$ را در نظر بگیرید. مقادیر اکسترمم مطلق تابع f را بیابید.

۳.۶.۴ بهینه سازی

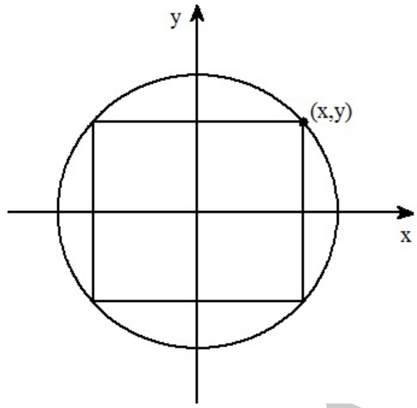
یکی از کاربردهای محاسبه اکسترمم مطلق، بهینه‌سازی است. به این مفهوم که هدف ما یافتن اکسترمم یک کمیت است. روش کلی برای حل مسایل بهینه‌سازی این است که تابعی که باید اکسترمم شود را بر حسب یک متغیر بنویسیم و پس از یافتن دامنه تابع، اکسترمم مطلق تابع را محاسبه کنیم.

مثال ۷.۶.۴. دو شهر که در یک طرف رودخانه‌ای واقع هستند، توافق کرده‌اند که مشترکاً یک موتورخانه و تصفیه خانه آب در منطقه‌ای در کنار رودخانه بنا کنند و آن‌را توسط دو لوله‌کشی جداگانه به دو شهر متصل نمایند (مطابق شکل ۱۷.۴). هرگاه فاصله دو شهر از رودخانه a و b و فاصله آن‌ها از هم c باشد، حداقل لوله لازم برای اتصال این شهرها به تصفیه خانه چقدر است؟



شکل ۱۷.۴

مثال ۸.۶.۴. یک دایره به شعاع R مفروض است. از میان کلیه مستطیل‌های محاط در این دایره، ابعاد مستطیلی را بیابید که بیشترین مساحت را داشته باشد.



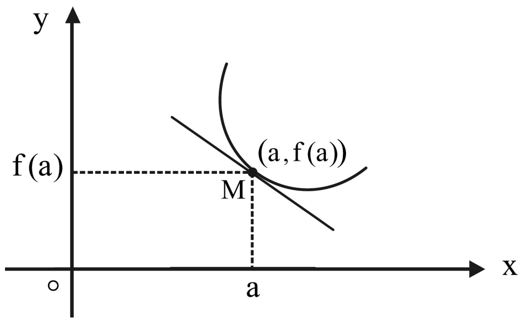
شکل ۱۸.۴

۴.۶.۴ تقعر، تحدب و نقطه عطف

تعریف ۵.۶.۴. نمودار تابع $y = f(x)$ را در نقطه $x = a$ مقعر (تقعر به سمت بالا) گویند هرگاه: اولاً $f'(a)$ موجود باشد و ثانیاً یک همسایگی محذوف نقطه a وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر x از این همسایگی نقطه $(x, f(x))$ در بالای خط مماس بر منحنی در نقطه $(a, f(a))$ واقع باشد.
نمودار تابع $y = f(x)$ را در یک بازه مقعر گوییم هرگاه در تمام نقاط آن بازه مقعر باشد.

شکل ۱۹.۴، قسمتی از نمودار یك منحنی را که در نقطه M مقعر است، نشان می‌دهد.

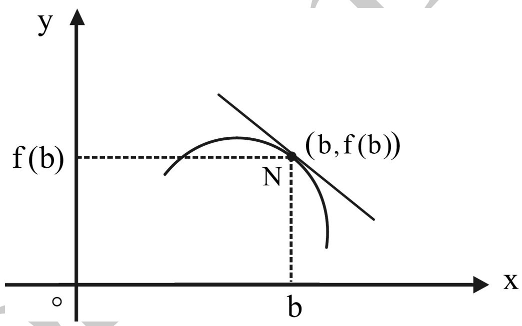
تعریف ۶.۶.۴. نمودار تابع $y = f(x)$ را در نقطه $x = b$ محدب (تقعر به سمت پایین) گویند هرگاه: اولاً $f'(a)$ موجود باشد و ثانیاً یک همسایگی محذوف نقطه b وجود داشته



شکل ۱۹.۴

باشد به‌طوری که به ازای هر x از این همسایگی نقطه $(x, f(x))$ در پایین خط مماس بر منحنی در نقطه $(b, f(b))$ واقع باشد.
نمودار تابع $y = f(x)$ را در یک بازه محدب گوییم هرگاه در تمام نقاط آن بازه محدب باشد.

شکل ۲۰.۴، قسمتی از نمودار یك منحنی را که در نقطه N محدب است، نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۴

قضیه ۵.۶.۴. فرض کنید تابع f در بازه (a, b) دو بار مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

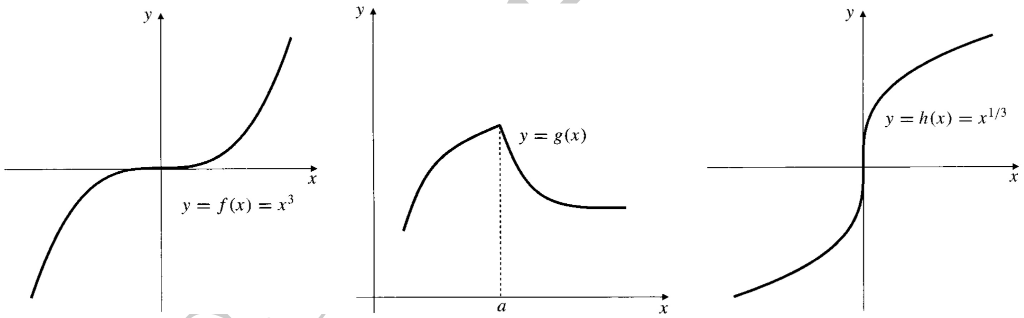
- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$، داشته باشیم $f''(x) \geq 0$، آن‌گاه f در این بازه مقعر است.

- اگر به ازای هر $x \in (a, b)$، داشته باشیم $f''(x) \leq 0$، آن‌گاه f در این بازه محدب است.

تعریف ۷.۶.۴. نقطه $(c, f(c))$ را نقطه عطف تابع f گویند هرگاه: اولاً مشتق تابع در نقطه c وجود داشته باشد و ثانیاً یک همسایگی محذوف نقطه c وجود داشته باشد به‌طوری که مشتق دوم f در این همسایگی حول c تغییر علامت دهد.

تبصره. شرط اول تعریف ۷.۶.۴ بیان می‌کند که در نقطه عطف، f پیوسته و خط مماس بر منحنی آن وجود دارد و از شرط دوم این تعریف نتیجه می‌گیریم که در نقطه عطف، جهت تقعر منحنی عوض می‌شود.
همچنین، از این تعریف نتیجه می‌شود نقاط گوشه‌دار یا زاویه‌دار منحنی جزء نقاط عطف تابع محسوب نمی‌شوند.

تبصره. از نظر هندسی، c طول نقطه عطف است هرگاه خط مماس بر نمودار f در c، از نمودار f عبور کند. در شکل ۲۱.۴ نمودار سه تابع f، g و h رسم شده است. نقطه $x = ۰$ برای f و h که یک نقطه بحرانی است، نقطه عطف است. ولی اگرچه تقعر تابع g در دو طرف نقطه $x = a$ مخالف است ولی نمودارش در این نقطه مماس ندارد، لذا نقطه $x = a$ برای g نقطه عطف نیست.



شکل ۲۱.۴

تبصره. برای تعیین نقاط عطف f، باید نقاط بحرانی f' یعنی نقاطی که f'' در آن‌ها موجود نیست یا صفر می‌شود را مشخص کنیم. حال اگر در این نقطه، f دارای مماس باشد و f'' تغییر علامت دهد، نقطه مورد نظر برای f طول نقطه عطف خواهد بود.

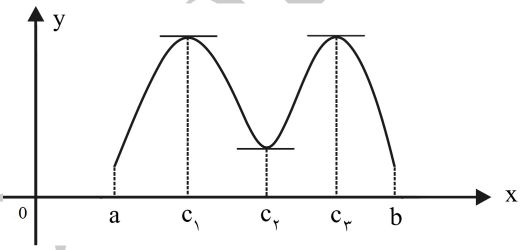
مثال ۹.۶.۴. نقاط عطف تابع $f(x) = \frac{۳x^۲ - ۲}{x^۳}$ را مشخص کنید.

۵.۶.۴ قضایای رل و میانگین

قضیه ۶.۶.۴ (قضیه رل). [1]اگر تابع f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و در بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$. در این صورت نقطه‌ای مانند c در بازه (a,b) وجود دارد به‌طوری که $f'(c)=0$.

برهان. دو حالت در نظر می‌گیریم:
ابتدا فرض کنیم تابع f در $[a,b]$ تابعی ثابت باشد؛ در این حالت به ازای هر $x\in(a,b)$، داریم $f'(x)=0$. بنابراین هر عدد دلخواه در (a,b) را می‌توان به عنوان c در نظر گرفت و در این حالت حکم ثابت می‌شود.
حال فرض کنیم تابع f در $[a,b]$ تابعی ثابت نباشد؛ در این حالت، چون f روی $[a,b]$ پیوسته است، در این فاصله ماکزیمم و می‌نیمم مطلق خود را اختیار می‌کند. فرض کنید c_1 و c_2 به‌ترتیب نقاط ماکزیمم و می‌نیمم مطلق f در $[a,b]$ باشند. چون f در $[a,b]$ ثابت نیست، بنابراین $f(c_1)\neq f(c_2)$. از طرفی چون $f(a)=f(b)$، نتیجه می‌شود که حداقل یکی از نقاط c_1 و c_2 در (a,b) قرار دارند. فرض کنید $c_1\in(a,b)$. پس c_1 نقطه ماکزیمم نسبی f و چون f' در (a,b) وجود دارد، در نتیجه $f'(c_1)=0$ و حکم ثابت می‌شود. □

در شکل ۲۲.۴، نمودار تابعی نشان داده شده است که در شرایط قضیه رل صدق می‌کند و در نقاط c_1، c_2 و c_3 خط مماس افقی وجود دارد.



شکل ۲۲.۴

مثال ۱۰.۶.۴. اگر $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$. نشان دهید به ازای بعضی مقادیر x در بازه $[0,1]$ داریم

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0.$$

مثال ۱۱.۶.۴. تابع f در $\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر و دارای سه ریشه متمایز است. معادله $f''(x) = ۰$ چند جواب دارد؟

تبصره. اگر مشتق یک تابع دارای n ریشه متمایز باشد، آن تابع دارای حداکثر $n + ۱$ ریشه متمایز خواهد بود.

با توجه به تبصره اخیر، یکی از کاربردهای قضیه رل، یافتن حداکثر تعداد ریشه‌های یک تابع است و به‌ویژه اگر آن را با قضیه مقدار میانی تلفیق کنیم، تعداد ریشه‌های تابع را می‌توان کراندار کرد.

مثال ۱۲.۶.۴. معادله $x^۴ - ۴x - ۱ = ۰$ چند ریشه دارد؟

قضیه ۷.۶.۴ (قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ))**.** فرض کنید تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و در بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

برهان. تابع ϕ را به‌صورت

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$$

تعریف می‌کنیم. تابع ϕ در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق‌پذیر است و داریم

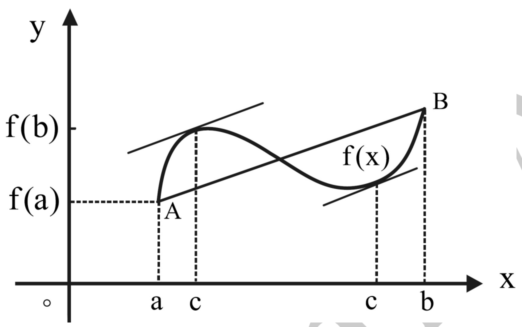
$$\phi(a) = \phi(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

پس بنا به قضیه رل، نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد به‌طوری که $\phi'(c) = 0$ و یا

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

تبصره. از نظر هندسی، قضیه مقدار میانگین تضمین می‌کند که حداقل یک نقطه در بازه (a, b) وجود دارد به‌طوری که مماس بر منحنی در آن نقطه برابر با شیب خط واصل $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ است.



شکل ۲۳.۴

حال با استفاده از قضیه مقدار میانگین، قضیه ۱.۶.۴ را ثابت می‌کنیم:

برهان قضیه ۱.۶.۴. فرض کنید x_1 و x_2 دو نقطه دلخواه و متمایز از $[a, b]$ با $x_1 < x_2$ باشند. چون تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ پیوسته و در (x_1, x_2) مشتق‌پذیر است، پس بنا به قضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند $c \in (x_1, x_2)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (۲.۴)$$

حال اگر:

- به ازای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) > 0$، در این صورت $f'(c) > 0$ و از (۲.۴) نتیجه می‌شود $f(x_2) > f(x_1)$، و لذا در این حالت تابع f صعودی اکید است.

- به ازای هر $x \in (a, b)$، $f'(x) < 0$، در این صورت $f'(c) < 0$ و از (۲.۴) نتیجه می‌شود $f(x_2) < f(x_1)$، و لذا در این حالت تابع f نزولی اکید است.

– به ازای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) = ۰$، در این صورت $f'(c) = ۰$ و از (۲.۴) نتیجه می‌شود $f(x_۲) = f(x_۱)$، و لذا در این حالت تابع f ثابت است.

□

مثال ۱۳.۶.۴. به ازای $x > ۰$، نشان دهید $\sin x < x$.

مثال ۱۴.۶.۴. به ازای $x > ۰$ و $-۱ \leq x < ۰$، نشان دهید $\sqrt{۱ + x} < ۱ + \frac{x}{۲}$.

مثال ۱۵.۶.۴. فرض کنید f بر بازه I دو بار مشتق‌پذیر باشد، یعنی f'' بر I موجود باشد. همچنین فرض کنید نقاط ۰ و ۲ متعلق به I بوده و $f(۰) = f(۱) = ۰$ و $f(۲) = ۱$. نشان دهید:

الف) به ازای نقطه‌ای مانند a در I، $f'(a) = \frac{۱}{۲}$؛

ب) به ازای نقطه‌ای مانند b در I، $f''(b) > \frac{۱}{۲}$؛

پ) به ازای نقطه‌ای مانند c' در I، $f'(c') = \frac{۱}{۷}$.

قضیه ۸.۶.۴ (قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته (کوشی))**.** فرض کنید تابع f و g در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و در بازه باز (a,b) مشتق‌پذیر باشند. در این صورت نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که

$$f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a)).$$

در حالتی که $g(b)-g(a)\neq 0$ و $g'(c)\neq 0$، عبارت بالا به صورت

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

بازنویسی می‌شود.

برهان. اگر $g(b)-g(a)=0$، در این‌صورت تابع g در شرایط قضیه رل صدق می‌کند و لذا نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $g'(c)=0$. بنابراین در این حالت با برابر صفر بودن دو طرف تساوی $f'(c)(g(b)-g(a))=g'(c)(f(b)-f(a))$، قضیه برقرار است.
حال فرض می‌کنیم $g(b)-g(a)\neq 0$ و تابع ϕ را به‌صورت

$$\phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g(x)$$

تعریف می‌کنیم. تابع ϕ در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق‌پذیر است و داریم

$$\phi(a)=\phi(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}.$$

پس بنا به قضیه رل، نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به‌طوری که $\phi'(c)=0$ و یا

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

$\square$

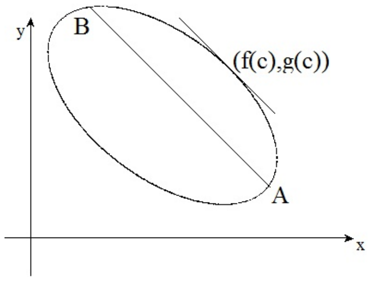
تبصره. اگر در قضیه کوشی g تابع همانی باشد، این قضیه به قضیه مقدار میانگین تبدیل می‌شود.

تبصره. از نظر هندسی، قضیه مقدار میانگین تضمین می‌کند که حداقل یک نقطه مانند

c در بازه (a, b) وجود دارد به‌طوری که در نقطه $(f(c), g(c))$ از نمودار دستگاه معادلات پارامتری

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

خط مماس بر منحنی موازی خط واصل $A(f(a), g(a))$ و $B(f(b), g(b))$ است.



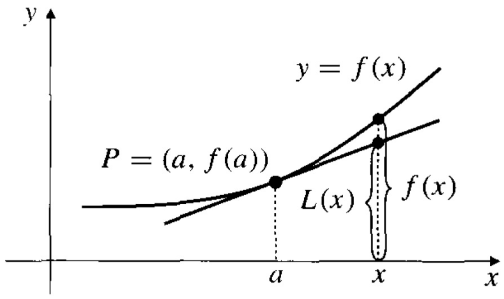
شکل ۲۴.۴

مثال ۱۶.۶.۴. تابع f روی بازه $[a, b]$ با $a \geq ۰$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر است. نشان دهید اعداد $c_۱$ و $c_۲$ در بازه (a, b) وجود دارند به‌طوری که

$$f'(c_۱) = (a + b)\frac{f'(c_۲)}{۲c_۲}.$$

۶.۶.۴ تقریبات خطی

مماس بر نمودار تابع $y = f(x)$ در $x = a$ رفتار آن را در نقطه $P(a, f(a))$ بهتر از هر خط مستقیم مار بر نقطه P توصیف می‌کند، زیرا هم جهت با منحنی $y = f(x)$ از نقطه P می‌گذرد. (شکل ۲۵.۴ را ببینید.)



شکل ۲۵.۴

تقریب خطی تابع f حول $x = a$ تابعی است مانند $L(x)$ که به‌صورت

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

تعریف می‌شود.

مثال ۱۷.۶.۴. برای تابع $f(x) = \sqrt{۱ + x}$ حول نقطه $x = ۰$، تقریب خطی به‌صورت

$$L(x) = f(۰) + f'(۰)(x - ۰) = ۱ + \frac{x}{۲},$$

و برای تابع $g(x) = \frac{۱}{x}$ حول $x = \frac{۱}{۲}$ تقریب خطی به‌صورت

$$L(x) = g(\frac{۱}{۲}) + g'(\frac{۱}{۲})(x - \frac{۱}{۲}) = ۴ - ۴x,$$

به‌دست می‌آیند.

مثال ۱۸.۶.۴. فرض کنید بخواهیم با استفاده از تقریب خطی، تقریبی برای مقدار $\sqrt{۲۶}$ به‌دست آوریم. با تعریف $f(x) = \sqrt{x}$، تقریب خطی حول $x = ۲۵$ برای $f(x)$ به‌صورت

$$L(x) = ۵ + \frac{۱}{۱۰}(x - ۵),$$

خواهد بود که مقدار $L(۲۶)$ تقریبی برای $\sqrt{۲۶}$ خواهد بود، یعنی،

$$\sqrt{۲۶} \approx L(۲۶) = ۵/۱.$$

تحلیل خطا

در یک تقریب خطا به صورت

$$\text{مقدار تقریبی} - \text{مقدار واقعی} = \text{خطا}$$

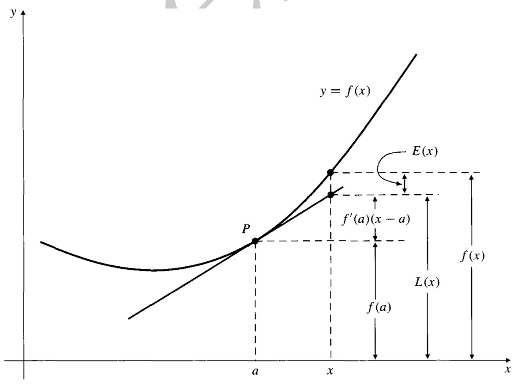
تعریف می‌شود.
اگر برای تقریب f در مجاورت $x=a$ از خطی سازی $f(x)$ حول $x=a$ استفاده کنیم، یعنی از

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

آن‌گاه خطای این تقریب، که با $E(x)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} E(x) &= f(x) - L(x) \\ &= f(x) - f(a) - f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

مقدار $E(x)$، فاصله عمودی در x بین نمودار f و خط مماس بر نمودار در نقطه a است. اگر x نزدیک a باشد، $E(x)$ در مقایسه با فاصله افقی بین x و a کوچک است (شکل ۲۶.۴ را ببینید.).



شکل ۲۶.۴

قضیه ۹.۶.۴ (فرمول خطا برای خطی سازی)**.** هرگاه $f''(t)$ به ازای هر t در بازه‌ای شامل a و x موجود باشد، آن‌گاه نقطه‌ای مانند ξ بین a و x وجود دارد به‌طوری که خطای

$E(x) = f(x) - L(x)$ در تقریب خطی

$$f(x) \approx L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

در رابطه

$$E(x) = \frac{f''(\xi)}{۲}(x-a)^{۲}$$

صدق می‌کند.

برهان. فرض کنید $x > a$. با توجه به اینکه $E(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a)$، می‌توان نوشت

$$E'(t) = f'(t) - f'(a).$$

قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته را برای هر دو تابع $E(t)$ و $(t-a)^{۲}$ بر بازه $[a, x]$ به‌کار می‌گیریم. با توجه به اینکه $E(a) = ۰$، عددی مانند c در (a, x) وجود دارد به‌طوری که به ازای ξای در (a, c)،

$$\begin{aligned}
\frac{E(x)}{(x-a)^{۲}} &= \frac{E(x) - E(a)}{(x-a)^{۲} - (a-a)^{۲}} \\
&= \frac{E'(c)}{۲(c-a)} \\
&= \frac{f'(c) - f'(a)}{۲(c-a)} = \frac{۱}{۲} f''(\xi).
\end{aligned}$$

تساوی آخر حاصل اعمال مجدد قضیه مقدار میانگین بر تابع $f'(t)$ در $[a, c]$ است. لذا

$$E(x) = \frac{۱}{۲} f''(\xi)(x-a)^{۲}.$$

□

سه نتیجه زیر، نتایج سرراست از قضیه ۹.۶.۴ هستند که اطلاعات مفیدی راجع به خطای تقریب خطی و حتی بهبود این تقریب به‌دست می‌دهند.

نتیجه ۱۰.۶.۴. هرگاه $f''(t)$ بین a و x علامت ثابت داشته باشد (همیشه مثبت یا همیشه منفی)، آن‌گاه خطای $E(x)$ در تقریب خطی $f(x) \approx L(x)$ همان علامت را دارد. هرگاه بین a و x داشته باشیم $f''(t) > ۰$ آن‌گاه $f(x) > L(x)$. هرگاه بین a و x داشته باشیم $f''(t) < ۰$، آن‌گاه $f(x) < L(x)$.

نتیجه ۱۱.۶.۴. هرگاه $f''(t)$ به ازای هر t بین a و x، داشته باشیم $|f''(t)| < k$، آن‌گاه $|E(x)| < \frac{k}{۲}(x-a)^۲$.

نتیجه ۱۲.۶.۴. هرگاه $f''(t)$ به ازای هر t بین a و x در $M < f''(t) < N$ (که در آن M و N اعداد ثابت هستند) صدق کند، آن‌گاه

$$L(x) + \frac{M}{۲}(x-a)^۲ < f(x) < L(x) + \frac{N}{۲}(x-a)^۲.$$

اگر M و N هم‌علامت باشند، تقریب بهتری از $f(x)$ به وسیله نقطه میانی این بازه شامل $f(x)$ به‌دست می‌آید

$$f(x) \approx L(x) + \frac{M+N}{۴}(x-a)^۲$$

در این تقریب خطا از نصف طول بازه کمتر است

$$|\text{خطا}| < \frac{N-M}{۴}(x-a)^۲.$$

مثال ۱۹.۶.۴. علامت و تخمین اندازه خطا در تقریب $\sqrt{۲۶} \approx ۵/۱$ را تعیین کنید. با استفاده از این‌ها، بازه‌ای به‌دست آورید که مطمئناً شامل $\sqrt{۲۶}$ باشد.

۷.۶.۴ چندجمله‌ای تیلور

خطی سازی تابع f حول $x=a$، یعنی تابع خطی $P_1(x)=L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$، رفتار $f(x)$ را در مجاورت $x=a$ از هر چندجمله‌ای درجه یک دیگر بهتر توصیف می‌کند، زیرا هر دوی P_1 و f در $x=a$ یک مقدار و یک مشتق دارند.

$$P_1(a)=f(a), \quad P_1'(a)=f'(a).$$

با استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه دو و بالاتر و سازش مشتقات بیشتر در $x=a$ می‌توان تقریبات بهتری برای $f(x)$ به‌دست آورد. مثلاً اگر f در مجاورت $x=a$ دو بار مشتق‌پذیر باشد، چندجمله‌ای درجه دو

$$P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

در

$$P_2(a)=f(a), \quad P_2'(a)=f'(a), \quad P_2''(a)=f''(a)$$

صدق کرده و رفتار تابع f در مجاورت $x=a$ را بهتر از هر چندجمله‌ای درجه دو دیگر توصیف می‌کند. فرض کنید f تابعی باشد که همه مشتقات متوالی تا مرتبه n را داراست. می‌خواهیم یک چندجمله‌ای مانند $P_n(x)$ از درجه n بیابیم به‌طوری که

$$P_n(a)=f(a), \quad P_n'(a)=f'(a), \quad \ldots, \quad P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \qquad (۳.۴)$$

فرض کنید $P_n(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n$. در این صورت

$$\begin{aligned}
P_n(a)&=a_0\\
P_n'(a)&=a_1+2a_2(x-a)+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}\\
P_n''(a)&=2a_2+6a_3(x-a)+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}\\
P_n^{(n)}(a)&=n!a_n.
\end{aligned}$$

برای اینکه تساوی‌های (۳.۴) برقرار باشد، بایستی داشته باشیم

$$a_0=f(a), \quad a_1=\frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2=\frac{f''(a)}{2!}, \quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

لذا چندجمله‌ای $P_n(x)$ به‌صورت

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

به‌دست می‌آید.

تعریف ۸.۶.۴. چندجمله‌ای $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ را چندجمله‌ای تیلور از درجه n برای تابع f در نقطه a گویند.

مثال ۲۰.۶.۴. چندجمله‌ای تیلور از درجه n برای تابع e^x در نقطه $x = a$ به‌صورت

$$P_n(x) = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

است.

مقادیر $f(x)$ و $P_n(x)$ در نقطه a و نقاط نزدیک a تقریباً با هم برابرند. اگر $R_n(x)$ اختلاف $f(x)$ و $P_n(x)$ باشد، یعنی $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$، آن‌گاه از قضیه زیر می‌توان $R_n(x)$ را به‌دست آورد. بنابراین مقدار $f(x)$ به شکل $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ به‌دست می‌آید.

قضیه ۱۳.۶.۴ (قضیه تیلور)**.** هرگاه مشتق $(n+1)$ام f به ازای هر t در بازه‌ای شامل a و x موجود باشد، آن‌گاه تابع f را در هر نقطه از این همسایگی می‌توان به صورت

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

نوشت، که در آن

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

و

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

و ξ نقطه‌ای بین a و x است.

در قضیه ۱۳.۶.۴، $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ را فرمول تیلور، $P_n(x)$ را چندجمله‌ای تیلور و $R_n(x)$ را باقی‌مانده لاگرانژ می‌نامند.

برهان. فرض کنید $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ خطای تقریب $f(x) \approx P_n(x)$ باشد. نشان می‌دهیم

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

اثبات را به استقرا روی n انجام می‌دهیم:
به ازای $n = 0$ داریم

$$f(x) = P_0(x) + R_0(x) = f(a) + R_0(x).$$

از طرفی بنا به قضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند X بین a و x وجود دارد به‌طوری که

$$f'(X) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

از دو معادله اخیر نتیجه می‌شود

$$R_0(x) = \frac{f'(X)}{1!}(x-a).$$

پس آزمون استقرا برقرار است. حال فرض کنید حکم به ازای $n = k - 1$ برای $k \geq 1$ برقرار باشد، یعنی عددی مانند X بین a و x وجود دارد به‌طوری که

$$R_{k-1}(x) = \frac{f^{(k)}(X)}{k!}(x-a)^k.$$

نشان می‌دهیم که حکم به ازای $n = k$ نیز برقرار است. فرض کنید $x > a$ (اثبات حالت $x < a$ نیز مشابه است). قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته را برای توابع $R_k(t)$ و $(t-a)^{k+1}$ روی بازه $[a, x]$ به‌کار می‌گیریم. چون $R_k(a) = 0$، بنابراین cای در بازه (a, x) وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{R_k(x)}{(x-a)^{k+1}} = \frac{R_k(x) - R_k(a)}{(x-a)^{k+1} - (a-a)^{k+1}} = \frac{R'_k(c)}{(k+1)(c-a)^k}$$

و داریم

$$R'_k(c) = f'(c) - f'(a) - f''(a)(c-a) - \cdots - \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(c-a)^{k-1}.$$

عبارت آخر همان $R_{k-۱}(c)$ برای تابع $f'(t)$ به‌جای $f(t)$ است و در نتیجه بنا به فرض استقرا برابر است با

$$\frac{(f')^{(k)}(X)}{k!}(c-a)^k = \frac{f^{(k+۱)}(X)}{k!}(c-a)^k,$$

به ازای Xای بین a و c. بنابراین

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+۱)}(X)}{(k+۱)!}(x-a)^{k+۱},$$

و اثبات استقرا کامل است. $\square$

مثال ۲۱.۶.۴. تقریب تیلور درجه دو به $\sqrt{۲۶}$ را بر مبنای مقادیر $f(x) = \sqrt{x}$ و مشتقاتش در ۲۵ بیابید. اندازه خطا را تخمین زده و بازه‌ای را مشخص کنید که مطمئناً شامل $\sqrt{۲۶}$ باشد.

تعریف ۹.۶.۴ (نماد $\mathcal{O}$ بزرگ)**.** وقتی $x \to a$، گوییم $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ اگر

$$|f(x)| \leq k|u(x)|$$

به ازای ثابتی مانند k بر بازه بازی شامل $x = a$ برقرار باشد.

به همین نحو، وقتی $x \to a$، گوییم $f(x) = g(x) + \mathcal{O}(u(x))$ اگر وقتی $x \to a$، $f(x) - g(x) = \mathcal{O}(u(x))$ یا

$$|f(x) - g(x)| \leq ku(x).$$

به عنوان مثال، وقتی $x \to ۰$، $\sin x = \mathcal{O}(x)$، زیرا در مجاورت صفر $|\sin x| \leq |x|$.

خواص $\mathcal{O}$ بزرگ

- هرگاه وقتی $x \to a$، داشته باشیم $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$، آن‌گاه به ازای هر ثابت c، وقتی $x \to a$، $cf(x) = \mathcal{O}(u(x))$.
- هرگاه وقتی $x \to a$، داشته باشیم $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ و وقتی $x \to a$، داشته باشیم $g(x) = \mathcal{O}(u(x))$ آن‌گاه وقتی $x \to a$، $f(x) \pm g(x) = \mathcal{O}(u(x))$.
- هرگاه به ازای ثابت k، وقتی $x \to a$، داشته باشیم $f(x) = \mathcal{O}((x-a)^k u(x))$، آن‌گاه وقتی $x \to a$، $\dfrac{f(x)}{(x-a)^k} = \mathcal{O}(u(x))$.

تبصره. قضیه تیلور بیان می‌کند اگر $f^{(n+۱)}(t)$ بر بازه‌ای شامل a و x وجود داشته و $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور $f(x)$ حول $x = a$ باشد، آن‌گاه وقتی $x \to a$، $f(x) = P_n(x) + \mathcal{O}((x-a)^{n+۱})$. این حکمی است راجع به اینکه چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$، تابع $f(x)$ را در مجاورت $x = a$ چقدر دقیق تقریب می‌زند. قضیه زیر نشان می‌دهد که فقط چندجمله‌ای تیلور $P_n(x)$، تابع $f(x)$ را به این دقت تقریب می‌زند.

قضیه ۱۴.۶.۴. هرگاه وقتی $x \to a$، داشته باشیم $f(x) = Q_n(x) + \mathcal{O}((x-a)^{n+۱})$، که در آن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n است، آن‌گاه $Q_n(x) = P_n(x)$. یعنی $Q_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور $f(x)$ حول $x = a$ است.

فرمول‌های تیلور چند تابع مقدماتی حول $x = ۰$:

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + \cdots + x^n + \mathcal{O}(x^{n+۱})$$

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+۱})$$

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+۱})$$

$$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots + (-۱)^n\frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \mathcal{O}(x^{۲n+۲})$$

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots + (-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \mathcal{O}(x^{۲n+۳})$$

$$\tan^{-۱} x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots + (-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \mathcal{O}(x^{۲n+۳})$$

مثال ۲۲.۶.۴. چندجمله‌ای تیلور درجه $۲n$ مربوط به $\cosh x$ حول $x = ۰$ را بیابید.

مثال ۲۳.۶.۴. چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ برای $e^{۲x}$ حول $x = ۱$ را از چندجمله‌ای تیلور e^x حول $x = ۰$ نتیجه بگیرید.

مثال ۲۴.۶.۴. چندجمله‌ای تیلور $P_۲(x)$ برای $\ln x$ حول $x = ۲$ را بیابید.

۸.۶.۴ محاسبه حدود توابع در حالات مبهم

مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ را نمی‌توان با جایگذاری $x = ۰$ در تابع $\frac{\sin x}{x}$ مستقیماً به‌دست آورد، چرا که هر دوی $\sin x$ و x در $x = ۰$ مساوی صفرند. $\frac{\sin x}{x}$ را صورت مبهم از نوع $\frac{۰}{۰}$ در $x = ۰$ می‌نامند. حد این صورت مبهم می‌تواند هر عددی باشد. به عنوان مثال، هر یک از خارج قسمت‌های $\frac{x}{x^۳}$، $\frac{kx}{x}$، $\frac{x^۳}{x^۲}$ یک صورت مبهم از نوع $\frac{۰}{۰}$ در $x = ۰$ هستند، ولی

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x}{x^۳} = \infty, \quad \lim_{x\to ۰} \frac{kx}{x} = k, \quad \lim_{x\to ۰} \frac{x^۳}{x^۲} = ۰.$$

انواع دیگر صور مبهم عبارتند از

$$\infty - \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{۰}{۰},\ ۰ \times \infty,\ ۱^\infty,\ ۰^۰,\ \infty^۰$$

اغلب صور مبهم از نوع $\frac{۰}{۰}$ را می‌توان از فرمول‌های تیلور به سهولت حساب کرد. به عنوان مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin x-\sin ۲x}{۲e^x-۲-۲x-x^۲}&=\lim_{x\to ۰}\frac{۲(x-\frac{x^۳}{۳!}+\mathcal{O}(x^۵))-(۲x-\frac{۸x^۳}{۳!}+\mathcal{O}(x^۵))}{۲(۱+x+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\mathcal{O}(x^۴))-۲-۲x-x^۲}\\&=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{x^۳}{۳}+\frac{۴x^۳}{۳}+\mathcal{O}(x^۵)}{\frac{x^۳}{۳}+\mathcal{O}(x^۴)}\\&=\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\mathcal{O}(x^۲)}{\frac{۱}{۳}+\mathcal{O}(x)}\\&=۳.\end{aligned}$$

یا به عنوان مثال دیگر

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x}{x^۲-۱}&=\lim_{t\to ۰}\frac{\ln(۱+t)}{(۱+t)^۲-۱}\\&=\lim_{t\to ۰}\frac{t+\mathcal{O}(t^۲)}{۲t+t^۲}\\&=\lim_{t\to ۰}\frac{۱+\mathcal{O}(t)}{۲+\mathcal{O}(t)}\\&=\frac{۱}{۲}.\end{aligned}$$

قواعد هوپیتال

در این قسمت، روش دیگری برای محاسبه صور مبهم از نوع $\frac{۰}{۰}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ارائه می‌دهیم. سایر انواع صور مبهم را می‌توان معمولاً با اعمال جبری و گرفتن لگاریتم به یکی از این صورت‌ها تحویل کرد.

قضیه ۱۵.۶.۴ (قاعده اول هوپیتال)**.** فرض کنید توابع f و g بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر بوده و $g'(x)\neq ۰$. همچنین فرض کنید

آ) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=۰$ و

ب) $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ (که در آن L متناهی یا $+\infty$ یا $-\infty$ است.)

در این‌صورت

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L.$$

اگر هر مورد $\lim\limits_{x\to a^+}$ را با $\lim\limits_{x\to b^-}$ و یا حتی $\lim\limits_{x\to c}$ که در آن $a<c<b$، عوض کنیم، نتایج مشابهی خواهیم داشت. حالات $a=-\infty$ و $b=+\infty$ نیز مجازند.

برهان. ابتدا اثبات را برای حالت $\lim\limits_{x\to a^+}$ به ازای a متناهی انجام می‌دهیم. توابع F و G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & a<x<b\\ \circ & x=a\end{cases} \quad \& \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & a<x<b\\ \circ & x=a\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر $x\in(a,b)$ توابع F و G توابعی پیوسته روی بازه $[a,x]$ و مشتق‌پذیر روی بازه (a,x) هستند. لذا بنابه قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته عددی مانند $c\in(a,x)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

چون $a<c<x$، پس اگر $x\to a^+$ آن‌گاه $c\to a^+$، و در نتیجه داریم

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=L.$$

حالت $\lim\limits_{x\to b^-}$ برای b متناهی به‌طور مشابه اثبات می‌شود. نتیجه برای حالت‌هایی که $a=-\infty$ یا $b=+\infty$ نیز با استفاده از تغییر متغیر $x=\frac{۱}{t}$ به‌دست می‌آید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to\circ^+}\frac{f\left(\frac{۱}{t}\right)}{g\left(\frac{۱}{t}\right)}=\lim_{t\to\circ^+}\frac{f'\left(\frac{۱}{t}\right)\left(-\frac{۱}{t^۲}\right)}{g'\left(\frac{۱}{t}\right)\left(-\frac{۱}{t^۲}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

□

قضیه ۱۶.۶.۴ (قاعده دوم هوپیتال). فرض کنید توابع f و g بر بازه (a,b) مشتق‌پذیر بوده و $g'(x)\neq\circ$. همچنین فرض کنید

آ) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ و

ب) $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (که در آن L متناهی یا $+\infty$ یا $-\infty$ است.)

در این‌صورت
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اگر هر مورد $\lim_{x\to a^+}$ را با $\lim_{x\to b^-}$ و یا حتی $\lim_{x\to c}$ که در آن $a < c < b$، عوض کنیم، نتایج مشابهی خواهیم داشت. حالات $a = -\infty$ و $b = +\infty$ نیز مجازند.

برهان. اثبات این قضیه پیچیده‌تر از قضیه اول هوپیتال است و در اینجا ارائه نمی‌شود.
$\square$

تبصره. در محاسبه حد یک کسر مبهم ممکن است چند بار استفاده پی‌درپی از قاعده هوپیتال مورد نیاز باشد، در صورتی که حد کسر آخر موجود و برابر با L باشد، از قاعده هوپیتال نتیجه می‌شود که حد کسرهای قبلی به‌ویژه کسر مورد نظر موجود و برابر L است. در صورت عدم وجود حد کسر آخر، استفاده از قاعده هوپیتال مجاز نیست. در هر مرحله استفاده از قاعده هوپیتال، باید شرایط استفاده از آن را تحقیق کرد. در حقیقت هیچ تضمینی وجود ندارد که قاعده هوپیتال لزوماً منجر به رفع ابهام و محاسبه حد شود. زیرا ممکن است $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ وجود نداشته باشد ولی $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ موجود باشد. به عنوان مثال، $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = ۰$ در حالی‌که $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{۱}$ موجود نیست. یا به‌عنوان مثالی دیگر، داریم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x = ۱$$

در حالی‌که با استفاده پی‌درپی از قاعده هوپیتال، داریم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sec^۲ x}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\tan x}{\sec x} = \cdots$$

ملاحظه می‌شود که قاعده هوپیتال منجر به رفع ابهام نمی‌شود.

مثال ۲۵.۶.۴. حدود زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)} \lim_{x\to ۱} \frac{\ln x}{x^۲-۱} \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to ۰} \frac{۲\sin x - \sin ۲x}{۲e^x - ۲ - ۲x - x^۲}$$

$$\text{(iii)} \lim_{x\to ۰^+} \left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{\sin x}\right)$$

محاسبه حد توابع نمایی به‌صورت $y = f(x)^{g(x)}$

قضیه ۱۷.۶.۴. به ازای هر عدد حقیقی x،

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n.$$

برهان. اگر $x = ۰$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنید $x \neq ۰$، قرار دهید $h = \frac{x}{n}$. در این صورت وقتی $n \to \infty$، آن‌گاه $h \to ۰$، لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} n\ln\left(۱ + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(۱+\frac{x}{n}\right)}{\frac{۱}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} x\frac{\ln\left(۱+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x\lim_{h\to ۰} \frac{\ln(۱+h)}{h} \\ &= x\lim_{h\to ۰} \frac{\ln(۱+h) - \ln ۱}{h} \\ &= x\,(\ln t)'\,|_{t=۱} = x.\end{aligned}$$

چون $\ln$ تابعی مشتق‌پذیر است، لذا تابعی پیوسته است. بنابراین خواهیم داشت

$$\ln \lim_{n\to\infty} \left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(۱ + \frac{x}{n}\right)^n = x$$

و با توجه به اینکه تابع نمایی معکوس تابع لگاریتم است، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

$\square$

تبصره. در حالت کلی داریم

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t.$$

تبصره. فرض کنید $y=f(x)^{g(x)}$ و $x\to a$، در این‌صورت در محاسبه $\lim\limits_{x\to a} y$ یکی از حالات زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

- اگر $f(x)$ و $g(x)$ هر دو به صفر میل کنند، $\lim\limits_{x\to a} y$ به‌صورت مبهم 0^0 درمی‌آید؛
- اگر $f(x)$ به ∞ و $g(x)$ به صفر میل کند، $\lim\limits_{x\to a} y$ به‌صورت مبهم ∞^0 درمی‌آید؛
- اگر $f(x)$ به ۱ و $g(x)$ به ∞ میل کند، $\lim\limits_{x\to a} y$ به‌صورت مبهم 1^∞ درمی‌آید.

برای رفع ابهام در هر حالت از طرفین $y=f(x)^{g(x)}$ لگاریتم می‌گیریم، در این صورت خواهیم داشت

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$$

سمت راست تساوی اخیر به صورتی است که می‌توان قاعده هوپیتال را در مورد آن به‌کار برد.

بنابراین برای محاسبه $\lim\limits_{x\to a} y$، کافی است مقدار $c=\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ را با استفاده از قاعده هوپیتال به‌دست آوریم، در این‌صورت $\lim\limits_{x\to a} y = e^c$. البته در حالتی که $f(x)$ به ۱ و $g(x)$ به ∞ میل کند (حالت سوم)، می‌توان $f(x)$ را به‌صورت $f(x)=1+\alpha(x)$ درنظر گرفت که $\alpha(x)$ یک تابع بی‌نهایت کوچک است وقتی که $x\to a$، و در چنین شرایطی برای محاسبه c، کافی است حد ساده‌تر زیر را حساب کنیم

$$c=\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\alpha(x).$$

مثال ۲۶.۶.۴. حدود زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to ۰^+} x^x, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to\infty}\left(۱+\sin\frac{۳}{x}\right)^x$$

$$\text{(iii)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+۱}{۲x+۱}\right)^{x^۲}$$

۷.۴ مسایل

۱. پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbb{Q},\\ x(1-x), & x\in\mathbb{Q}^c,\end{cases}$ را بررسی کنید.

۲. تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $f'(0)$ را محاسبه کنید؛

ب) دلیل خود را برای وجود یا عدم وجود $f''(0)$ بیان کنید؛

پ) با ذکر دلیل مشخص کنید آیا نقطه $x=0$، نقطه ماکزیمم نسبی یا می‌نیمم نسبی یا عطف تابع f است یا خیر؟

۳. فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که در هر نقطه از $(0,1)$ مشتق‌پذیر است. اگر $f(0)=0$ و $f(1)=1$، نشان دهید نقاط x_1 و x_2، $0<x_1<x_2<1$، وجود دارند به‌طوری که

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2.$$

۴. نقاط بحرانی تابع

$$f(x)=\begin{cases}x^2-\ln x^2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

را به‌دست آورید و تعیین کنید این نقاط ماکزیمم نسبی هستند یا می‌نیمم نسبی.

۵. طول نقطه می‌نیمم نسبی تابع پارامتری $x=\dfrac{2t}{t-1}$ و $y=\dfrac{t^2}{t-1}$ را بیابید.

۶. تقعر تابع $f(x)=\ln(2-x-x^2)$ بر بازه (a,b) رو به سمت پایین است. حداکثر مقدار $b-a$ را بیابید.

۷. فرض کنید f بر بازه $[0,1]$ پیوسته و $f(0)=0$ باشد. همچنین فرض کنید f' بر بازه $(0,1)$ موجود و صعودی باشد. نشان دهید تابع $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ بر بازه $(0,1)$ صعودی است.

۸. تابع $f:(-۱,+\infty)\to\mathbb{R}$ به‌صورت $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۱+x}}$ تعریف شده است.

الف) چندجمله‌ای تیلور درجه ۳ این تابع حول $x=۰$ را بیابید؛

ب) مقدار تقریبی برای $\dfrac{۱}{\sqrt{۱/۰۱}}$ از طریق تقریب خطی به‌دست آورید و مقدار خطا را تخمین بزنید؛

پ) چنانچه لازم باشد مقدار $\dfrac{۱}{\sqrt{۱/۰۱}}$ با دقت $۱۰^{-۶}$ یا بهتر محاسبه شود از تقریب درجه چند f باید استفاده کرد؟ جواب خود را به‌طور دقیق توجیه کنید.

۹. حدود زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to+\infty} x\left(۱-\cos\frac{۱}{x}\right) \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)^{x}$$

$$\text{(iii)}\ \lim_{x\to ۰}(\cos x)^{\frac{۱}{x}}$$

۱۰. یک قطعه سیم به طول ℓ را بریده و به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. یکی را به شکل مربع و دیگری را به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع خم می‌کنیم. برای اینکه مجموع مساحت‌ها حداقل (می‌نیمم) شود، نسبت طول‌های بریده شده را تعیین کنید.

فصل ۵

مختصات قطبی

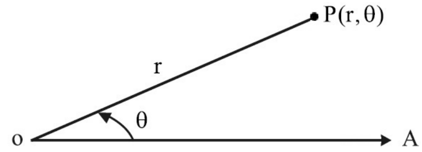
۱.۵ مقدمه

در دستگاه مختصارت دکارتی که از دو محور عمود بر هم تشکیل شده است هر نقطه از صفحه به‌وسیله طول و عرض آن مشخص می گردد. روش دیگری برای مشخص کردن محل یك نقطه در صفحه وجود دارد که به مختصات قطبی موسوم است.
دستگاه مختصات قطبی از یك نقطه و از یك محور تشکیل شده است. در این دستگاه محور افقی OA (محور xها) را محور قطبی یا شعاع اولیه و نقطه ثابت O (مبدأ مختصات) را قطب می‌نامند (شکل ۱.۵ را ببینید).

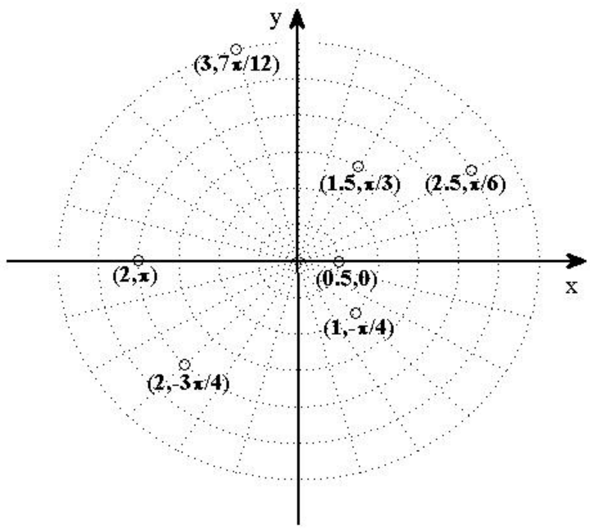
شکل ۱.۵

۲.۵ نمایش نقطه در مختصات قطبی

در مختصات قطبی، مختصات هر نقطه در صفحه با توجه به فاصله جهت‌دار آن از مبدأ یعنی r و زاویه‌ای که خط واصل از مبدأ به آن با جهت مثبت محور xها می‌سازد (که شعاع حامل نامیده می‌شود)، یعنی θ، مشخص می‌شود و نقطه P به‌صورت (r, θ) نمایش داده می‌شود.
زوج مرتب (r, θ) را مختصات قطبی نقطه P و OP را شعاع حامل می‌نامند (شکل ۲.۵ را ببینید). در شکل ۳.۵ چند نقطه به همراه مختصات قطبی‌اشان نمایش داده شده است.



شکل ۲.۵



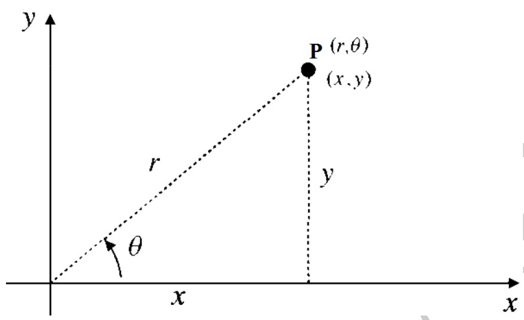
شکل ۳.۵

تبصره. در مختصات قطبی r می‌تواند منفی نیز باشد. در این صورت به جای آنکه نقطه را در ضلع پایانی زاویه θ انتخاب کنیم، قرینه آن نقطه را نسبت به O روی امتداد این ضلع به دست می‌آوریم. به‌طور کلی، در مختصات قطبی، بر خلاف مختصات دکارتی، نمایش نقطه P به‌طور یکتا مشخص نمی‌شود. در واقع اگر (r, θ) نمایش نقطه P در مختصات قطبی باشد، آن‌گاه $(r, \theta + 2k\pi)$ و $(-r, \theta + \pi + 2k\pi)$ به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$، نیز نمایش‌های دیگر برای P هستند. به‌عنوان مثال، اگر $(-2, -\frac{\pi}{6})$ مختصات نقطه P در دستگاه قطبی باشد، در این‌صورت $(-2, \frac{11\pi}{6})$، $(2, \frac{5\pi}{6})$ و $(2, \frac{17\pi}{6})$ نمایش‌های دیگری برای این نقطه در مختصات قطبی هستند.

تبصره. قطب (مبدأ مختصات) دارای مختصات $(0, \theta)$ در دستگاه قطبی است که در آن θ مقداری دلخواه است. به‌وضوح قطب تنها نقطه‌ای است که در آن r برابر صفر است. اگر P قطب نباشد و r و θ را در دو شرط $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $r > 0$ محدود کنیم، در این صورت مختصات P در دستگاه قطبی یکتا خواهد بود.

۳.۵ رابطه بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

فرض کنید مختصات P در دستگاه دکارتی برابر (x,y) و در دستگاه قطبی برابر (r,θ) باشد. در این صورت با توجه به شکل ۴.۵، داریم



شکل ۴.۵

$$\begin{cases} r^{۲} = x^{۲} + y^{۲} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

با استفاده از این معادلات، می‌توان مختصات دکارتی را به قطبی و مختصات قطبی را به دکارتی تبدیل کرد. فقط برای تعیین θ از معادله $\tan\theta = \frac{y}{x}$، بایستی دقت شود که نقطه P در کدام ربع قرار دارد و متناظر با آن θ را تعیین کرد. به عنوان مثال، مختصات دکارتی نقطه $P_۱$ با مختصات قطبی $(-۲, \frac{\pi}{۳})$ برابر (x,y) است که

$$x = r\cos\theta = -۲\cos\frac{\pi}{۳} = -۱,$$
$$y = r\sin\theta = -۲\sin\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳},$$

همچنین مختصات قطبی نقطه $P_۲$ با مختصات دکارتی $(۲, -۲\sqrt{۳})$ برابر (r,θ) است که با شرط $r > ۰$ و $۰ \le \theta \le ۲\pi$، داریم

$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} = ۴, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\sqrt{۳}.$$

چون نقطه $P_۲$ در ربع چهارم است، $\theta = \frac{۵\pi}{۳}$ انتخاب می‌شود و مختصات قطبی $P_۲$ برابر با $(۴, \frac{۵\pi}{۳})$ خواهد بود.

۴.۵ نمودار در مختصات قطبی

به‌طور کلی هر معادله‌ای که شامل x و y باشد، نشان دهنده خمی مسطح نسبت به دستگاه مختصات دکارتی است. به‌طور مشابه، هر معادله‌ای که شامل r و θ باشد، در حالت کلی بیانگر خمی مسطح نسبت به دستگاه مختصات قطبی است.

مثال ۱.۴.۵. خط راست $۲x-۳y = ۵$ در دستگاه دکارتی، دارای معادله قطبی $۲r\cos\theta - ۳r\sin\theta = ۵$ یا $r = \frac{۵}{۲\cos\theta - ۳\sin\theta}$ است. به‌طور کلی اگر $c \neq ۰$ و $a^۲ + b^۲ \neq ۰$، منحنی قطبی $r = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$، خط $ax + by = c$ را مشخص می‌کند.

تبصره. دو معادله قطبی در ظاهر ممکن است متفاوت باشند، اما نمودار یکسانی داشته باشند. به‌طور کلی اگر یک منحنی قطبی دارای معادله $r = f(\theta)$ باشد، همین منحنی با معادلات

$$(-۱)^k r = f(\theta + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

نیز به‌دست می‌آید.

مثال ۲.۴.۵. معادله منحنی‌های داده شده را از مختصات دکارتی به قطبی یا برعکس تبدیل کنید.

$$\text{(i)}\ (x^۲ + y^۲ + ۲x)^۲ = ۴(x^۲ + y^۲), \qquad \text{(ii)}\ r^۲ = \csc ۲\theta$$

مثال ۳.۴.۵. خم $r = ۲a\cos(\theta - \theta_۰)$ بیانگر چه نوع خمی است؟

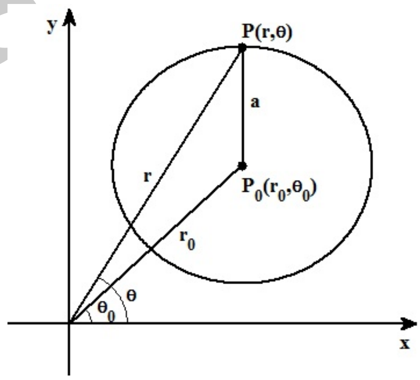
حالات خاص نمودارهای قطبی

- اگر $a \neq 0$ عددی ثابت باشد، آن‌گاه $r = a$ مکان هندسی کلیه نقاطی از صفحه است که به فاصله $|a|$ از مبدأ (قطب) قرار دارند (معادله دایره به مرکز مبدأ و شعاع $|a|$).
- اگر θ_0 عددی ثابت باشد، آن‌گاه $\theta = \theta_0$ مکان نقاط یک خط راست گذرنده از مبدأ با شیب $\tan\theta_0$ است (البته اگر r فقط مقادیر مثبت را بگیرد، در این صورت معادله $\theta = \theta_0$ معادله نیم خطی که از مبدأ می‌گذرد و با جهت مثبت محور xها زاویه θ_0 می‌سازد، را نشان خواهد داد.)
- نمودار قطبی معادله $r = f(\theta - \theta_0)$ از دوران نمودار قطبی $r = f(\theta)$ به اندازه θ_0 حول مبدأ در جهت مثلثاتی به‌دست می‌آید. به عنوان مثال، نمودار معادله قطبی $r\cos(\theta - \theta_0) = a$ خط راستی است که از دوران خط $x = a$ به اندازه θ_0 در جهت مثلثاتی به‌دست می‌آید.

تبصره. فاصله دو نقطه $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ در مختصات قطبی برابر است با

$$|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

تبصره. برای یافتن معادله قطبی دایره‌ای به شعاع $a > 0$ و به مرکز $P_0(r_0, \theta_0)$، فرض می‌کنیم $P(r, \theta)$ نقطه‌ای دلخواه روی این دایره باشد. چون فاصله دو نقطه P_0 و P برابر



شکل ۵.۵

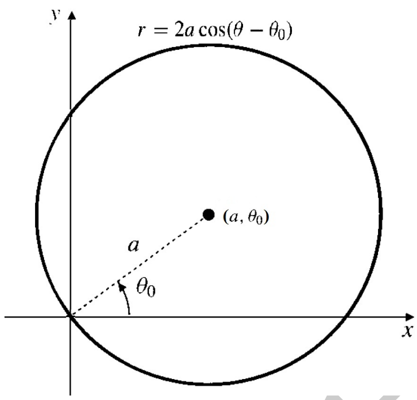
شعاع a است، بنا به تبصره اخیر می‌توان نوشت

$$a^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0). \qquad (1.5)$$

– اگر دایره از مبدأ عبور کند، آن‌گاه $r_\circ = a$ و معادله (۱.۵) به‌صورت

$$r = ۲a\cos(\theta - \theta_\circ).$$

ساده می‌شود.



شکل ۶.۵

– اگر دایره از مبدأ عبور کند و مرکز روی قسمت مثبت محور xها قرار گیرد ($\theta_\circ = ۰$)، آن‌گاه معادله (۱.۵) به شکل ساده‌تر

$$r = ۲a\cos\theta,$$

تبدیل می‌شود.

– اگر دایره از مبدأ عبور کند و مرکز روی قسمت مثبت محور yها قرار گیرد ($\theta_\circ = \frac{\pi}{۲}$)، آن‌گاه معادله (۱.۵) به‌صورت

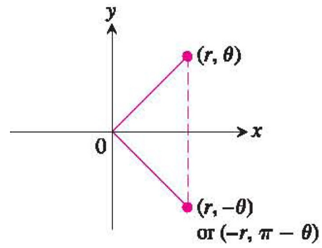
$$r = ۲a\sin\theta,$$

تبدیل می‌شود.

۱.۴.۵ تقارن در مختصات قطبی

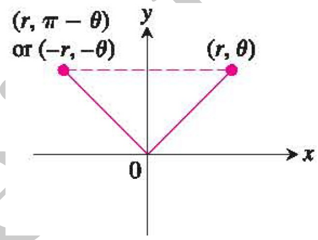
معادله یک منحنی قطبی به‌صورت $r = f(\theta)$ را در نظر بگیرید:

– اگر با تبدیل $\theta \to -\theta$ یا $\begin{cases} \theta \to \pi - \theta \\ r \to -r \end{cases}$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به محور xها متقارن است؛



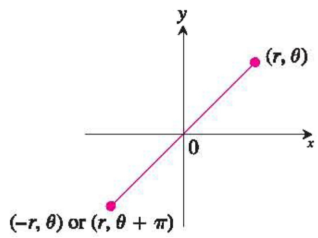
شکل ۷.۵

– اگر با تبدیل $\theta \to \pi - \theta$ یا $\begin{cases} \theta \to -\theta \\ r \to -r \end{cases}$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به محور yها متقارن است؛

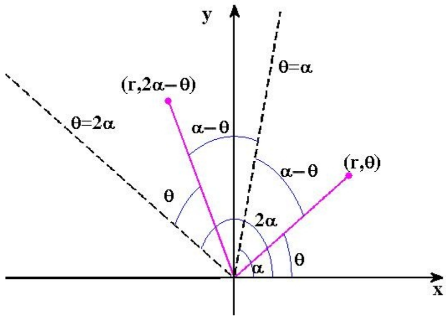


شکل ۸.۵

– اگر با تبدیل $\theta \to \pi + \theta$ یا $r \to -r$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به مبدأ مختصات (قطب) متقارن است.

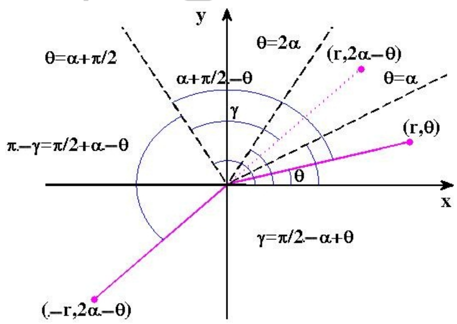


شکل ۹.۵



شکل ۱۰.۵

– در حالت کلی‌تر، اگر با تبدیل $\theta \to ۲\alpha - \theta$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به خط $\alpha = \theta$ متقارن است (شکل ۱۰.۵ را ببینید). همچنین اگر با تبدیل $\begin{cases} \theta \to ۲\alpha - \theta \\ r \to -r \end{cases}$ معادله عوض نشود، نمودار نسبت به خط $\theta = \alpha + \frac{\pi}{۲}$ متقارن است (شکل ۱۱.۵ را ببینید).



شکل ۱۱.۵

۵.۵ رسم نمودار در مختصات قطبی

شیب منحنی قطبی

برای یافتن خط مماس بر منحنی $r = f(\theta)$، بایستی شیب این خط یعنی $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنیم و برای محاسبه آن نیز از مشتق‌گیری پارامتری برای منحنی پارامتری

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

استفاده می‌کنیم:

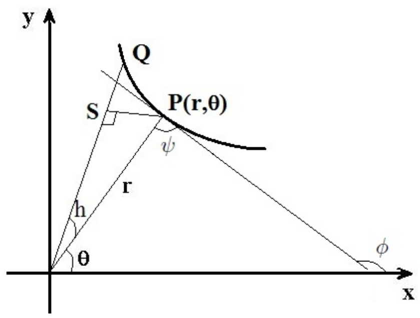
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

اگر به ازای $\theta = \theta_\circ$، منحنی $r = f(\theta)$ از مبدأ عبور کند ($f(\theta_\circ) = \circ$)، در این صورت

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\circ,\theta_\circ)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta}{f'(\theta)\cos\theta} = \tan\theta_\circ,$$

یعنی خط $\theta = \theta_\circ$ در مبدأ بر منحنی مماس است.

در مختصات قطبی، معمولاً از زاویه بین شعاع حامل در هر نقطه و خط مماس بر منحنی در آن نقطه استفاده می‌شود. با استفاده از روابطی که ذیلاً به‌دست می‌آوریم، می‌توان جهت خط مماس بر منحنی قطبی $r = f(\theta)$ را در نقطه‌ای مانند $P(r,\theta)$ غیر از مبدأ تعیین کرد.



شکل ۱۲.۵

فرض کنید Q نقطه‌ای روی منحنی $r = f(\theta)$ و نزدیک نقطه $P(r,\theta)$ و متناظر با زاویه $\theta + h$ باشد (شکل ۱۲.۵ را ببینید). همچنین فرض کنید PS عمود وارد بر OQ باشد. در این صورت داریم

$$\sin h = \frac{\overline{PS}}{r} \Longrightarrow \overline{PS} = f(\theta)\sin h,$$
$$\overline{SQ} = \overline{OQ} - \overline{OS} = f(\theta+h) - f(\theta)\cos h.$$

اگر خط مماس بر $r = f(\theta)$ در نقطه P با نیم‌خط $\overline{OP}$ زاویه ψ تشکیل دهد، آن‌گاه به ازای $h \to ۰$، ψ برابر $\angle SQP$ خواهد شد. لذا

$$\begin{aligned}\tan\psi &= \lim_{h\to ۰}\frac{\overline{PS}}{\overline{SQ}} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(\theta)\sin h}{f(\theta+h) - f(\theta)\cos h}\\ &\overset{[\frac{۰}{۰}]}{\underset{H}{=}} \lim_{h\to ۰}\frac{f(\theta)\cos h}{f'(\theta+h) + f(\theta)\sin h}\\ &= \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{r}{r'}.\end{aligned}$$

بنابراین در هر نقطه واقع بر خم $r = f(\theta)$ مانند P، زاویه ψ بین نیم‌خط $\overline{OP}$ و مماس بر خم با رابطه $\tan\psi = \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$ بیان می‌شود.
در حالت خاص، اگر $f'(\theta) = ۰$، آن‌گاه $\psi = \frac{\pi}{۲}$. یعنی، خط OP بر خط مماس در نقطه P عمود است. همچنین اگر $f(\theta) = ۰$، آن‌گاه $\psi = ۰$. یعنی، خط OP و خط مماس در نقطه P بر هم منطبق هستند.
با توجه به شکل ۱۲.۵ می‌توان نوشت:

$$\text{مماس افقی} \Longrightarrow \phi = \theta + \psi = \pi \Longrightarrow \tan\psi = -\tan\theta \Longrightarrow r = -r'\tan\theta$$
$$\text{مماس عمودی} \Longrightarrow \phi = \theta + \psi = \frac{\pi}{۲} \Longrightarrow \tan\psi = \cot\theta \Longrightarrow r = r'\cot\theta.$$

بنابراین از حل معادله $r = -r'\tan\theta$، مقدار θ برای نقطه‌ای که مماس بر منحنی در آن نقطه افقی است، به‌دست می‌آید و از حل معادله $r = r'\cot\theta$، مقدار θ برای نقطه‌ای که مماس بر منحنی در آن نقطه عمودی است، به‌دست می‌آید.

مثال ۱.۵.۵. منحنی به معادله $r = ۱ - \sin\theta$ را در نظر بگیرید.

الف) معادله خط مماس بر منحنی را در $\theta = 0$ بیابید؛

ب) نقطه (نقاط) (x, y) را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی در آن نقطه (نقاط) افقی باشد؛

پ) نقطه (نقاط) (x, y) را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی در آن نقطه (نقاط) عمودی باشد.

گام‌های مفید در رسم منحنی‌های قطبی

گام‌های زیر در رسم منحنی قطبی $r = f(\theta)$ می‌تواند مفید باشد:

– دامنه تغییرات θ را مشخص کنید؛ یعنی ابتدا دامنه تابع $r = f(\theta)$ را مشخص می‌کنیم. اگر f تابعی متناوب نباشد، آن‌گاه دامنه تغییرات θ همان دامنه f خواهدبود. اگر متناوب با دوره تناوب T باشد، کافی است دامنه تغییرات θ را یک دوره تناوب انتخاب و منحنی را در این فاصله رسم کنیم، سپس آن را به اندازه T حول قطب در جهت مثلثاتی به دفعات لازم دوران داده تا شکل منحنی کامل شود.

– تقارن‌های منحنی را بیابید.

– f' را تعیین علامت کرده و فاصله‌هایی را برای θ که در آن‌ها $r = f(\theta)$ صعودی یا نزولی است، مشخص کنید.

– خطوط مماس بر منحنی را در نقاط خاص، به‌ویژه در مبدأ و نقاطی که مماس در آنها افقی یا عمودی است، رسم کنید تا وضعیت منحنی در آن نقاط مشخص شود.

– مجانب‌های منحنی را (در صورت وجود) پیدا کرده و رسم کنید.
خط $\theta = \theta_\circ$ را امتداد مجانب مستقیم تابع $r = f(\theta)$ گویند هرگاه $\lim\limits_{\theta \to \theta_\circ} f(\theta) = \infty$.
اگر $d = \lim\limits_{\theta \to \theta_\circ} f(\theta)\sin(\theta - \theta_\circ)$، آن‌گاه خط ℓ موازی با خط $\theta = \theta_\circ$ و به فاصله d از آن را مجانب مستقیم تابع $r = f(\theta)$ می‌نامند. همچنین دایره $r = a$ را مجانب دایره‌ای منحنی $r = f(\theta)$ گویند هرگاه $\lim\limits_{\theta \to \infty} f(\theta) = a$.

– از چند نقطه کمکی برای رسم دقیق‌تر منحنی استفاده کنید. از جمله نقاط کمکی مهم می‌توانند نقاطی باشند که به ازای آنها $\theta = \circ$ (محل تلاقی با محور xها) یا $\theta = \frac{\pi}{۲}$ (محل تلاقی با محور yها) باشند. همچنین مقادیری برای θ که به ازای آنها منحنی به مبدأ برمی‌گردد، یعنی θهایی که از حل $r = \circ$ به‌دست می‌آیند، نیز می‌توانند در رسم بهتر منحنی کمک کنند.

مثال ۲.۵.۵. نمودار قطبی منحنی‌های زیر را رسم کنید.

$$\text{(i)}\ r^{۲} = \cos(۲\theta) \qquad \text{(ii)}\ r = a(۱ - \cos\theta),\ \ (a > \circ)$$

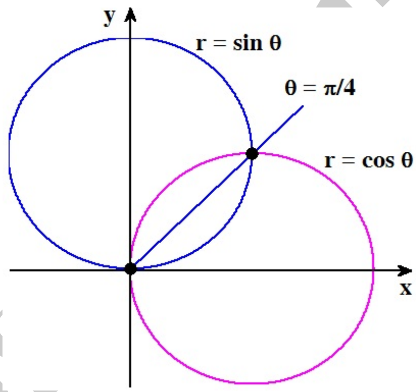
$$\text{(iii)}\ r\theta = a,\ \ (a > \circ)$$

۶.۵ تقاطع منحنی‌های قطبی

چون نمایش نقاط صفحه در مختصات قطبی یکتا نیست، یافتن نقاط برخورد (محل تقاطع) منحنی‌های قطبی پیچیده‌تر از یافتن نقاط برخورد منحنی‌های دکارتی است. در واقع، اگرچه منحنی‌های $r=f(\theta)$ و $r=g(\theta)$ در نقطه $(r_\circ,\theta_\circ)$ به ازای $r_\circ$ و $\theta_\circ$ ای که

$$f(\theta_\circ)=g(\theta_\circ) \quad \& \quad r_\circ=f(\theta_\circ)$$

همدیگر را قطع خواهند کرد، ولی ممکن است نقاط برخورد دیگری نیز داشته باشند. به‌ویژه، اگر هر دو منحنی از مبدأ عبور کنند، مبدأ یک نقطه برخورد دو منحنی خواهد بود حتی اگر این نقطه از حل معادله $f(\theta)=g(\theta)$ به‌دست نیاید، چون منحنی‌ها ممکن است با θهای متفاوت به مبدأ برسند. به عنوان مثال، دو دایره $r=\sin\theta$ و $r=\cos\theta$ در مبدآ و همچنین در نقطه $(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{\pi}{۴})$ همدیگر را قطع می‌کنند، اگرچه تنها نقطه $(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{\pi}{۴})$ از حل معادله $\sin\theta=\cos\theta$ به‌دست می‌آید (شکل ۱۳.۵ را ببینید).



شکل ۱۳.۵

۷.۵ مسایل

۱. معادله قطبی داده شده را به مختصات دکارتی تبدیل کنید و نوع خم را مشخص کنید.

$$\text{(i)}\ r = ۳\sec\theta \qquad \text{(ii)}\ r = \frac{۲}{۱+\sin\theta}$$

$$\text{(iii)}\ r = \frac{۲}{۲-\cos\theta}$$

۲. خطوط مماس بر منحنی $r^۲ = ۴\sin ۲\theta$ را در مبدأ بیابید.

۳. بیشترین مقدار طول نقاط منحنی $x^۲ + y^۲ = \sqrt{x^۲+y^۲} + y$ را به‌دست آورید.

۴. کوتاهترین و بلندترین فاصله مبدأ را از خم $x^۲ + xy + y^۲ = ۱۶$ بیابید.

۵. نمودار قطبی منحنی‌های زیر را رسم کنید.

$$\text{(i)}\ r = \sin(۲\theta) \qquad \text{(ii)}\ r^۲ = ۴\cos\theta$$

$$\text{(iii)}\ r = a\theta,\ \ (a > ۰)$$

فصل ۶

انتگرال و کاربرد آن

۱.۶ مقدمه

وقتی به ایده شهودی میزان تغییر معنی دقیق دادیم، به مفهوم مشتق تابع رسیدیم که فصل ۴ به حساب دیفرانسیل، یعنی بررسی مشتقات و کاربرد آنها، اختصاص داشت.

یکی دیگر از مسایل بنیادی که در ریاضیات مورد بررسی قرار می‌گیرد، مساله مساحت است یعنی تعیین مساحت ناحیه‌ای از صفحه که بین خم‌های گوناگون محصور است.

مفهوم اساسی دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال، **انتگرال** یک تابع است که در تلاش برای معنی دقیق دادن به ایده مساحت یک منحنی با یک یا چند لبه خمیده به‌وجود می‌آید. مطالعه انتگرال‌ها، که در فصل حاضر به آن می‌پردازیم، حساب انتگرال نام دارد. نتیجه کلیدی این فصل، قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است که رابطه عمیق حساب دیفرانسیل را با حساب انتگرال نشان می‌دهد. در واقع، معلوم می‌شود که انتگرال تابع f را می‌توان از دو مقدار تابع دیگر F که f مشتق آن است، به‌دست آورد.

۲.۶ انتگرال معین

تعریف ۱.۲.۶. مجموعه $\mathcal{P}=\{x_۰,x_۱,\ldots,x_n\}$ را یک افراز بازه $[a,b]$ گویند هرگاه

$$a=x_۰<x_۱<x_۲<\ldots<x_{n-۱}<x_n=b,$$

افراز $\mathcal{P}$ بازه $[a,b]$ را به n زیربازه $[x_{i-1},x_i]$، $1 \le i \le n$ با طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ تقسیم می‌کند. اگر طول زیربازه‌ها برابر باشد یعنی $\forall i,\ \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ آن‌گاه افراز $\mathcal{P}$ را یک افراز منظم می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۶. بزرگ‌ترین مقدار Δx_iها را نرم افراز $\mathcal{P}$ نامیده و با $\|\mathcal{P}\|$ نشان می‌دهیم

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

فرض کنید f تابعی معین و پیوسته بر یک بازه بسته کراندار مانند $[a,b]$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ یک افراز معین دلخواه از این بازه باشد. f در هر زیربازه مانند $[a,b]$ دارای مقادیر اکسترمم است. لذا اعدادی مانند l_i و u_i از زیربازه iام وجود دارند به‌طوری‌که به ازای هر $x \in I_i$ داریم

$$f(l_i) \le f(x) \le f(u_i).$$

قرار دهید

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) &= f(l_1)\Delta x_1 + f(l_2)\Delta x_2 + \ldots + f(l_n)\Delta x_n,\\
\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) &= f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \ldots + f(u_n)\Delta x_n,\\
\mathcal{R}(f,\mathcal{P}) &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n, \quad \xi_i \in I_i
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}(f,\mathcal{P})$ را مجموع پایین ریمان، $\mathcal{U}(f,\mathcal{P})$ را مجموع بالای ریمان و $\mathcal{R}(f,\mathcal{P})$ را مجموع ریمان می‌نامند.
اگر

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \mathcal{I},$$

آن‌گاه f را در بازه $[a,b]$ ریمان انتگرال‌پذیر گویند و با نماد $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ نشان می‌دهند.
$\mathcal{I}$ را مقدار انتگرال معین تابع f در بازه $[a,b]$ می‌نامند.
اگر تابع f در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه با توجه به اینکه

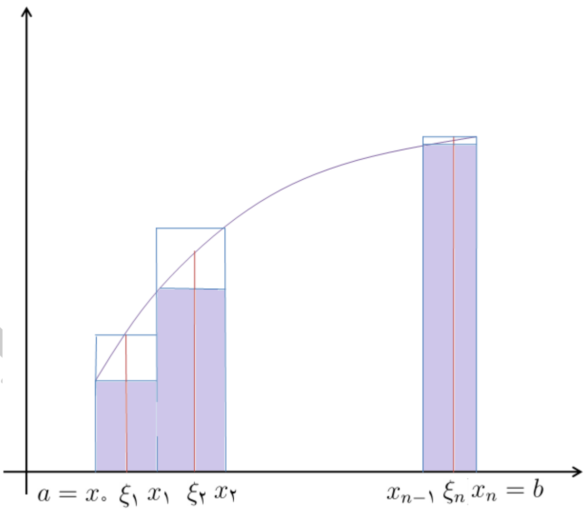
$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \le \mathcal{R}(f,\mathcal{P}) \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}),$$

می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to \circ} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}).$$

در انتگرال معین $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$، a را حد پایین و b را حد بالای انتگرال می‌نامند. تابع f را انتگرال‌ده و x را متغیر انتگرال‌گیری می‌نامیم.
علامت انتگرال یعنی $\int$ شبیه حرف S کشیده است و با توجه به اینکه انتگرال معین حد یک مجموع و S حرف اول کلمه Sum است، این نماد برای انتگرال استفاده شده است.
بایستی توجه داشت انتگرال معین f بر بازه $[a, b]$ عدد است و نه تابعی بر حسب متغیر x. این عدد به حدود انتگرال و انتگرال‌ده وابسته است و به متغیر x وابسته نیست. در واقع، به‌جای x می‌توان از متغیر دیگری استفاده کرد.

تبصره. از لحاظ هندسی، اگر f در بازه $[a, b]$ پیوسته و مثبت باشد آن‌گاه انتگرال معین $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ برابر سطح زیر منحنی تابع f در بازه $[a, b]$ است. در واقع، با توجه به شکل، مجموع بالای ریمان برابر مجموع مساحت‌های مستطیل‌های بزرگ‌تر، مجموع پایین ریمان برابر مجموع مساحت‌های مستطیل‌های کوچک‌تر و مجموع ریمان برابر مجموع مساحت‌های مستطیل‌های میانی هستند. وقتی تعداد زیربازه‌ها افزایش می‌یابد،



شکل ۱.۶

این مجموع‌ها به هم نزدیک‌تر می‌شوند. در واقع، وقتی $\|\mathcal{P}\| \to \circ$، این مجموع‌ها با هم برابر و مقدار آن برابر مساحت زیر منحنی تابع f در بازه $[a, b]$ خواهد شد.

تبصره. تابع پیوسته و کراندار با تعداد متناهی نقطه انفصال و همچنین تابع کراندار یکنوا روی بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است.

تبصره. نماد $\mathrm{d}x$، دیفرانسیل x است که به‌جای Δx در مجموع‌های ریمان ظاهر شده است. اگر انتگرال‌ده به بیش از یک متغیر وابسته باشد، دیفرانسیل بیان می‌کند که کدام‌یک، متغیر انتگرال‌گیری است.

مثال ۱.۲.۶. نشان دهید تابع $f(x) = x^۲$ بر بازه $[۰, a]$ انتگرال‌پذیر است. سپس مقدار انتگرال $\int_۰^x x^۲ \mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

مثال ۲.۲.۶. نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} ۱, & x \in \mathbb{Q} \\ ۰, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ بر هر بازه دلخواه $[a, b]$ با $a < b$ انتگرال‌پذیر نیست.

مثال ۳.۲.۶. نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} ۱, & x = ۰ \\ ۰, & x \neq ۰ \end{cases}$ بر هر بازه دلخواه $[a, b]$ با $a < b$ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال آن برابر صفر است.

ویژگی‌های انتگرال معین

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید f و g بر بازه‌ای شامل نقاط a، b و c انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت

(الف) انتگرال بر هر بازه به طول صفر، صفر است.

(ب) با تعویض جای حدود انتگرال، علامت انتگرال عوض می‌شود، یعنی،

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

(پ) انتگرال به‌طور خطی به انتگرال‌ده وابسته است. فرض کنید A و B ثابت‌های دلخواهی باشند. در این صورت

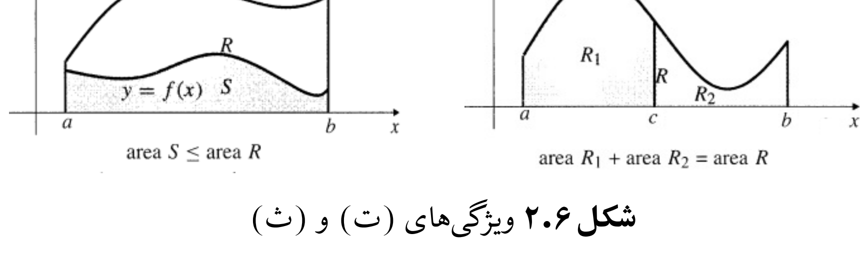
$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + B\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(ت) انتگرال به‌طور جمعی به بازه انتگرال‌گیری بستگی دارد، یعنی

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

(ث) اگر $a \leq b$ و به ازای $x \in [a,b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

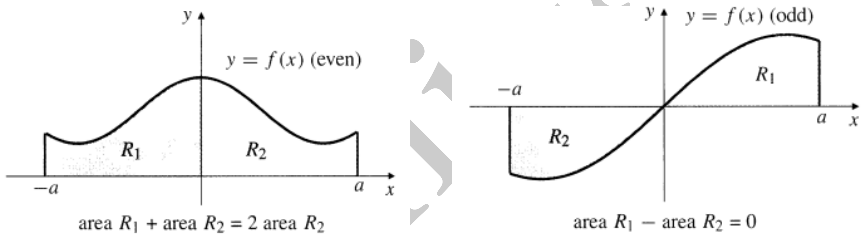


شکل ۲.۶ ویژگی‌های (ت) و (ث)

(ج) نامساوی مثلثی
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

(چ) انتگرال هر تابع فرد بر هر بازه متقارن حول صفر، صفر است، یعنی،
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

(ح) انتگرال هر تابع زوج بر هر بازه متقارن حول صفر، دو برابر انتگرال بر نیمه مثبت آن بازه است، یعنی
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$



شکل ۳.۶ ویژگی‌های (چ) و (ح)

(خ) فرض کنید f یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد. در این صورت
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

(د)
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

مثال ۴.۲.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int_{-2}^{2}(2+5x)\mathrm{d}x, \qquad \text{(ii)} \int_{0}^{3}(2+x)\mathrm{d}x, \qquad \text{(iii)} \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$$

مثال ۵.۲.۶. نشان دهید

$$\left|\int_{۱}^{\sqrt{۳}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^{۲}+۱}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\pi}{۱۲e}$$

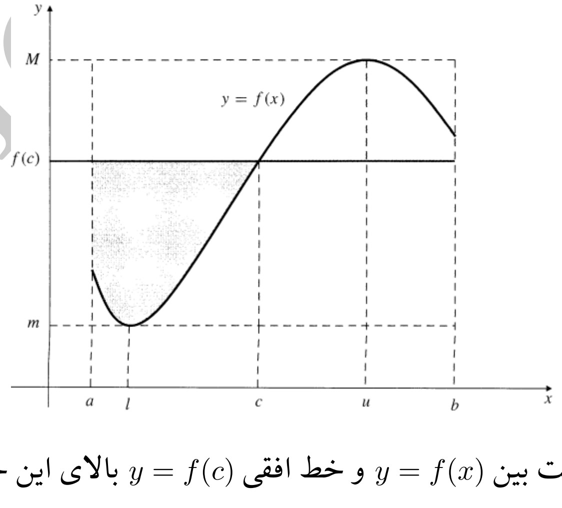
قضیه ۲.۲.۶ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها)**.** فرض کنید f یک تابع پیوسته بر $[a,b]$ باشد. در این صورت، نقطه‌ای مانند c متعلق به بازه $[a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(c).$$

برهان. با توجه به اینکه f تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ است، مقادیر ماکزیمم و مینیمم خود را در این بازه به‌ترتیب در نقاطی مانند $x = u$ و $x = l$ اختیار می‌کند. یعنی به ازای هر $x \in [a,b]$ داریم

$$m = f(l) \leq f(x) \leq f(u) = M,$$

به ازای افراز دو نقطه‌ای $\mathcal{P} = \{a,b\}$ از بازه فوق داریم



شکل ۴.۶ نصف مساحت بین $y = f(x)$ و خط افقی $y = f(c)$ بالای این خط قرار دارد و نصف دیگر زیر آن

$$m(b-a)=\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\mathcal{U}(f,\mathcal{P})=M(b-a),$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(l)=m\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M=f(u).$$

بنابر قضیه مقدار میانی نقطه‌ای مانند c بین l و u است به طوری‌که

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

به عبارت دیگر، به ازای عددی مانند c بین a و b، $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ برابر است با مساحت مستطیلی به قاعده $b-a$ و ارتفاع $f(c)$. □

مقدار متوسط تابع

از شکل ۴.۶ ملاحظه می‌شود که مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ و بالای خط $y=f(c)$ برابر است با مساحت بالای منحنی $y=f(x)$ و زیر خط $y=f(c)$. در این حالت مقدار $f(c)$ را ”مقدار متوسط“ تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۶. فرض کنید f یک تابع پیوسته بر $[a,b]$ باشد. مقدار متوسط f با $\bar{f}$ نمایش و به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

بنابر قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، مساحت زیر نمودار f برابر حاصل‌ضرب طول بازه $[a,b]$ در ارتفاع $f(c)$ است. لذا $f(c)$ را می‌توان به مفهومی ارتفاع متوسط نمودار تابع f تلقی کرد.

قضیه ۳.۲.۶ (قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرال‌ها). فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a,b]$ و g تابعی انتگرال‌پذیر باشد به‌طوری‌که در بازه $[a,b]$ تغییر علامت ندهد.

در این صورت، نقطه‌ای مانند c متعلق به بازه $[a, b]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

مثال ۶.۲.۶. مقدار متوسط تابع $f(x) = ۱ + \sin x$ بر بازه $[-\pi, \pi]$ را بدست آورید.

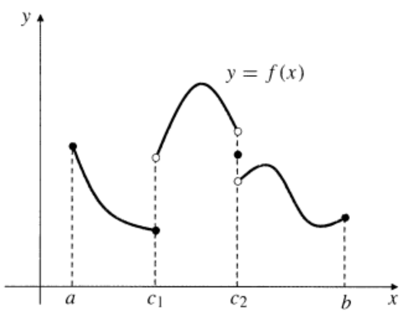
مثال ۷.۲.۶. مثالی از یک تابع ناپیوسته ارائه دهید که قضیه مقدار میانگین برای آن برقرار باشد. همچنین مثالی از یک تابع ناپیوسته ارائه دهید که قضیه مقدار میانگین برای آن برقرار نباشد.

مثال ۸.۲.۶. نشان دهید

$$\frac{۱}{۳} \leq \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x}{۲ + \cos x}\mathrm{d}x \leq \frac{۱}{۲}$$

تابع قطعه قطعه پیوسته

فرض کنید $c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ مجموعه‌ای متناهی از اعداد حقیقی باشد. تابع f را که بر $[c_0, c_n]$، جز بعضی نقاط c_i، $i = 0, 1, \ldots, n$ معین است بر این بازه قطعه قطعه پیوسته می‌نامیم هرگاه به ازای هر i تابع پیوسته‌ای مانند F_i بر بازه $[c_{i-1}, c_i]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که بر بازه (c_{i-1}, c_i)، $f(x) = F_i(x)$.



شکل ۵.۶ تابع قطعه قطعه پیوسته

در این حالت انتگرال f از c_0 تا c_n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_{c_0}^{c_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} F_i(x)\mathrm{d}x$$

مثال ۹.۲.۶. انتگرال $\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x$ را که در آن $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ بیابید.

قضیه ۴.۲.۶ (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)**.** فرض کنید I یک بازه و $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. به ازای نقطه‌ای مانند a از I، تابع $F : I \to \mathbb{R}$ را به صورت $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ تعریف می کنیم. در این صورت، تابع F در بازه I مشتق‌پذیر

است و $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. به عبارت دیگر،

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

اگر بازه I در یک یا دو طرف بسته باشد، در هر نقطه انتهایی مشمول بازه، مشتق یک‌طرفه منظور می‌شود.

برهان. با استفاده از تعریف مشتق برای تابع $F(x)$ داریم

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to ۰} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{h\to ۰} \frac{۱}{h} hf(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x), \end{aligned}$$

که در آن c عددی بین x و $x+h$ و وابسته به h است. $\square$

با توجه به قضیه ۴.۲.۶، انتگرال هر تابع پیوسته تعریف شده روی یک بازه، مشتق تابع دیگری است. هر تابع که مشتق آن برابر تابع داده شده f باشد، تابع اولیه برای f یا انتگرال نامعین f می‌نامیم.

فرض کنید G تابع اولیه دیگری برای f روی بازه I باشد. در این صورت، $(F-G)' = ۰$ و در نتیجه $F-G$ تابعی ثابت است. یعنی هر تابع اولیه دیگر برای f به اندازه مقداری ثابت با F اختلاف دارد. اگر به‌جای نقطه a نقطه‌ای دیگر مانند b از I اختیار کنیم و فرض کنیم $G(x) = \int_b^x f(t)\mathrm{d}t$، آن‌گاه G نیز تابع اولیه‌ای برای f است و $G(x)-F(x)$ برابر مقدار ثابت $\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$ است.

نتیجه ۵.۲.۶. فرض کنید I یک بازه، $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $\phi :\to \mathbb{R}$ تابع اولیه‌ای برای f باشد. در این صورت، به ازای هر دو نقطه از I مانند a و b داریم

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \phi(b) - \phi(a). \qquad (۱.۶)$$

برهان. فرض کنید $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. در این صورت داریم

$$F(a)=\circ, \quad F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t,$$

لذا حکم به ازای F نیز برقرار است. حال فرض کنید ϕ تابع اولیه‌ای برای f باشد. در این صورت، $\phi(x)-F(x)=c$ که در آن c عددی ثابت است. لذا حکم برای ϕ نیز برقرار است. $\square$

با استفاده از رابطه (۱.۶) می‌توان تعبیر دیگری از قضیه مقدار میانگین برای تابع f بیان کرد. فرض کنید $[a,b]$ بازه زمانی و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابع سرعت ذره‌ای باشد که روی خط راست حرکت می‌کند. در این صورت، تابع اولیه‌ای برای f که با F نمایش می‌دهیم، تابع مکان است و $F(b)-F(a)$ میزان جابجایی ذره طی بازه زمانی $[a,b]$ است. بنابراین میانگین تابع f برابر $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ است که همان سرعت متوسط ذره طی بازه زمانی $[a,b]$ است.

تبصره.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

وقتی انتگرال معین را با این روش محاسبه می‌کنیم، ثابت c در انتگرال نامعین را از قلم می‌اندازیم. در واقع، این ثابت در تفریق حذف می‌شود.

تبصره. با توجه به قضیه ۴.۲.۶، $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ تابع اولیه $f(x)$ است. لذا اگر تابعی در یک بازه پیوسته باشد آن‌گاه دارای تابع اولیه‌ای در آن بازه خواهد بود.

نکته. قضیه ۴.۲.۶ ارتباطی بین انتگرال معین، انتگرال نامعین و مشتق برقرار می‌کند. بر اساس این ارتباط، انتگرال نامعین تابع را تعریف می‌کنند که همان عمل پادمشتق یا عمل یافتن تابع اولیه است.

تبصره. اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و f تابعی پیوسته باشند آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x)).$$

مثال ۱۰.۲.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)}\ \int_{۰}^{a} x^{۲}\mathrm{d}x,\quad \text{(ii)}\ \int_{-۱}^{۲}(x^{۲}-۳x+۲)\mathrm{d}x,$$
$$\text{(iii)}\ \int_{-۳}^{۴}|x+۲|\mathrm{d}x,\quad \text{(iv)}\ \int_{-۳}^{۳}\ln(x+\sqrt{x^{۲}+۱})\mathrm{d}x,$$
$$\text{(v)}\ \int_{-۱}^{۱}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{۴-x^{۲}}},\quad \text{(vi)}\ \int_{-۲}^{۰}\frac{\mathrm{d}x}{۴+x^{۲}}$$

مثال ۱۱.۲.۶. مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$\text{(i)}\ F(x)=\int_{x}^{۳}e^{-t^{۲}}\mathrm{d}t\qquad \text{(ii)}\ G(x)=x^{۲}\int_{-۴}^{۵x}e^{-t^{۲}}\mathrm{d}t,$$
$$\text{(iii)}\ H(x)=\int_{x^{۲}}^{x^{۳}}e^{-t^{۲}}\mathrm{d}t,\quad \text{(iv)}\ U(x)=x^{۲}\int_{\frac{۱}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^{۲}\mathrm{d}t,\ (x>۰)$$
$$\text{(v)}\ V(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x}\int_{۰}^{x}\sin t^{۲}\mathrm{d}t\,, & x\neq ۰,\\ ۰\,, & x=۰\end{cases}$$

مثال ۱۲.۲.۶. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n}\cos\left(\frac{j\pi}{۲n}\right),$$
$$\text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^{۲}+۱}+\frac{n}{n^{۲}+۴}+\cdots+\frac{n}{۲n^{۲}}\right),$$
$$\text{(iii)}\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۳}}\int_{۰}^{x^{۲}}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t,$$
$$\text{(iv)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}}\mathrm{d}t\right)^{۲}}{\int_{۰}^{x}e^{۲t^{۲}}\mathrm{d}t}$$

مثال ۱۳.۲.۶. معادله انتگرال $f(x)=\pi+\pi\int_{۱}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ را حل کنید.

مثال ۱۴.۲.۶. فرض کنید به ازای $x>۱$، f تابعی پیوسته باشد و

$$f(x)=۱+\frac{۱}{x}\int_{۱}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

ضابطه تابع f را بیابید.

نکته. درباره انتگرال‌های به شکل $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ که در آن f در همه نقاط $[a,b]$ پیوسته نیست، جانب احتیاط را از دست ندید. به عنوان مثال، می‌دانیم اگر $x \neq 0$ آن‌گاه $\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln|x|$. با این وجود، به صرف اینکه $\frac{1}{x}$ تابعی فرد است ***درست نیست*** بنویسیم

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

در واقع، $\frac{1}{x}$ در $x = 0$ نامعین و فاقد حد است و بر $[-1,0]$ یا $[0,1]$ انتگرال‌پذیر نیست.

۳.۶ انتگرال نامعین

همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، تابعی مانند F را تابع اولیه (پاد مشتق) تابع f گویند هرگاه $F'(x) = f(x)$.
با توجه به تعریف فوق، اگر $F(x)$ تابع اولیه f باشد آن‌گاه به ازای هر عدد ثابت c، $F(x) + c$ نیز تابع اولیه f است.
هرگاه $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد آن‌گاه دسته منحنی‌های $F(x) + c$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ گویند و با نماد $\int f(x)\mathrm{d}x$ نشان می‌دهند. در واقع

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

نکته. هر تابعی دارای تابع اولیه نیست. در واقع، توابعی مانند جزءصحیح و تابع علامت دارای تابع اولیه نیستند. همچنین، بعضی از توابع دارای تابع اولیه هستند ولی تابع اولیه آن‌ها با استفاده از توابع مقدماتی قابل بیان نیست. به عنوان مثال، توابع e^{-x^2}، $\frac{\sin x}{x}$، $\frac{\cos x}{x}$، $\frac{1}{\ln x}$ و $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$ $(0 < k < 1)$ دارای تابع اولیه هستند ولی تابع اولیه آن‌ها، قابل بیان بر حسب توابع مقدماتی نیست. اما بدون اثبات می‌پذیریم که:
اگر تابع f در فاصله I پیوسته باشد، دارای تابع اولیه است و بنابراین دارای انتگرال نامعین خواهد بود.

تبصره. از تعریف انتگرال نامعین داریم

$$\text{(i)}\ \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x), \qquad \text{(ii)}\ d\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x,$$
$$\text{(iii)}\ \int dF(x) = F(x) + c$$

تبصره. همان‌طور که برای انتگرال معین بیان شد، انتگرال نامعین نیز دارای خاصیت خطی است، یعنی

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ \int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x.$$

۴.۶ روش‌های انتگرال‌گیری

۱.۴.۶ استفاده مستقیم از فرمول‌های مشتق

با توجه به اینکه $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + c$، انتگرال بسیاری از توابع را می‌توان به‌طور مستقیم محاسبه کرد. در جدول زیر برخی فرمول‌های مهم داده شده است:

$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + c$
$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c$	$\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + c$
$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c$	$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + c$
$\int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \tan x + c$	$\int \tanh x\mathrm{d}x = \ln\cosh x + c$
$\int (1+\cot^2 x)\mathrm{d}x = -\cot x + c$	$\int \coth x\mathrm{d}x = \ln\lvert\sinh x\rvert + c$
$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + c$
$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + c$
$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + c$	
$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$	
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$	

۲.۴.۶ روش تعویض متغیر

قضیه ۱.۴.۶. فرض کنید $\phi : I \to \mathbb{R}$ و $F : J \to \mathbb{R}$ توابع معلومی باشند که در آن I و J بازه‌هایی در $\mathbb{R}$ هستند و $\phi(I) \subset J$. F مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است و $F'(x) = f(x)$. در این صورت، $F \circ \phi$ تابع اولیه‌ای برای $(f \circ \phi)' \cdot \phi'$ است، یعنی،

$$\int (f \circ \phi)(x) \cdot \phi'(x) \mathrm{d}x = (F \circ \phi)(x). \qquad (۲.۶)$$

برهان. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای می‌توان نوشت

$$\frac{d}{dx}(F(\phi(x)) = F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

□

با فرض $u = \phi(x)$ رابطه (۲.۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int (f \circ \phi)(x) \cdot \phi'(x) \mathrm{d}x = \int f(u) \mathrm{d}u.$$

مثال ۱.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int \left(\frac{۱}{\pi x} + a^{\pi x}\right) \mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int \frac{x}{۱ + x^۴} \mathrm{d}x, \quad \text{(iii)} \int e^x \sqrt{۱ + e^x} \mathrm{d}x,$$

$$\text{(iv)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^۲ + ۴x + ۵}, \quad \text{(v)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{۲x} - ۱}}, \quad \text{(vi)} \int \frac{e^x + ۱}{e^x - ۱} \mathrm{d}x,$$

$$\text{(vii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + ۱}, \quad \text{(viii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}, \quad \text{(ix)} \int \frac{\sin^۳(\ln x) \cos^۳(\ln x)}{x} \mathrm{d}x,$$

$$\text{(x)} \int \frac{\sin^۳ x}{\cos^۵ x} \mathrm{d}x, \quad \text{(xi)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{۱ + \sqrt{x}}}, \quad \text{(xii)} \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d}x,$$

قضیه ۲.۴.۶. فرض کنید $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$، مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد و

$$\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b, \quad \phi([\alpha, \beta]) \subseteq I = [a, b].$$

همچنین فرض کنید $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. در این صورت

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(u) \mathrm{d}u. \tag{۳.۶}$$

برهان. فرض کنید F یک تابع اولیه برای f باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \mathrm{d}x &= F(\phi(x))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) \\ &= F(b) - F(a) = F(u)\Big|_{a}^{b} = \int_{a}^{b} f(u) \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

□

مثال ۲.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int_{۰}^{۸} \frac{\cos\sqrt{x+۱}}{\sqrt{x+۱}} \mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int_{e}^{e^{۲}} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}, \quad \text{(iii)} \int_{\frac{\pi^{۲}}{۱۶}}^{\frac{\pi^{۲}}{۹}} \frac{۲^{\sin\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x,$$

$$\text{(iv)} \int_{۰}^{\ln ۲} \frac{e^{u}}{۴ + e^{۲u}} \mathrm{d}u, \quad \text{(v)} \int_{۱}^{\sqrt[۴]{e}} \frac{\tan^{۲}(\pi \ln x)}{x} \mathrm{d}x$$

مثال ۳.۴.۶. با استفاده از تغییر متغیر $x = \pi - u$ نشان دهید که به ازای هر تابع پیوسته f بر $[۰, ۱]$ داریم

$$\int_{۰}^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{۲} \int_{۰}^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x$$

۳.۴.۶ انتگرال‌گیری جزء به جزء

فرض کنید u و v توابعی مشتق‌پذیر باشند. با توجه به دستور لایبنیتس برای مشتق حاصل‌ضرب دو تابع داریم

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx},$$

اگر $\frac{du(x)}{dx}$ و $\frac{dv(x)}{dx}$ روی بازه $[a,b]$ وجود داشته باشند، بنا به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان نوشت

$$\int_a^b u(x)\frac{dv(x)}{dx}\mathrm{d}x+\int_a^b v(x)\frac{du(x)}{dx}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{d}{dx}(u(x)v(x))\mathrm{d}x = u(b)v(b)-u(a)v(a),$$

یا به‌طور معادل داریم

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

تساوی فوق را دستور انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء برای انتگرال معین گویند. تحت همین شرایط، $u(x)v(x)$ تابع اولیه‌ای برای تابع $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ است. لذا

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

تساوی فوق به دستور انتگرال‌گیری جزء به جزء برای انتگرال نامعین معروف است.

نکته. هنگام استفاده از این روش، انتگرال‌ده را طوری به حاصل‌ضرب دو عامل u و v' تجزیه می‌کنیم که انتگرال v' به‌آسانی محاسبه شود و محاسبه انتگرال $\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$ ساده‌تر از انتگرال $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ باشد. این روش را به این دلیل انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌نامیم که مجموع یک عبارت انتگرال‌گیری شده و یک انتگرال (محاسبه نشده) را جایگزین انتگرال مفروض می‌کند، یعنی فقط جزئی از انتگرال اولیه را نتیجه می‌دهد.

مثال ۴.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int \ln x \mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int x^{۲} \sin x \mathrm{d}x, \quad \text{(iii)} \int x \tan^{-۱} x \mathrm{d}x,$$
$$\text{(iv)} \int \sin^{-۱} x \mathrm{d}x, \quad \text{(v)} \int e^{ax} \cos bx \mathrm{d}x, \quad \text{(vi)} \int \sin^{۲}(۱ + \ln x) \mathrm{d}x,$$

نکته. اگر انتگرال‌ده به صورت حاصل‌ضرب یک چندجمله‌ای در یک تابع نمایی یا مثلثاتی یا تابع دیگری باشد که بتوان از آن به‌راحتی انتگرال گرفت، چندجمله‌ای را u و بقیه را $\mathrm{d}v$ اختیار می‌کنیم.

نکته. اگر انتگرال‌ده حاوی لگاریتم یا یک تابع معکوس مثلثاتی یا تابع دیگری باشد که به‌آسانی نتوان از آن انتگرال گرفت، ولی مشتق آن به‌آسانی محاسبه شود، آن تابع را u و بقیه را برابر $\mathrm{d}v$ می‌گیریم. به عنوان مثال، انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{I} = \int \sec^{۳} x \mathrm{d}x,$$

با انتخاب $u = \sec x$ و $\sec^{۲} x \mathrm{d}x = \mathrm{d}v$ داریم

$$\mathrm{d}u = \sec x \cdot \tan x \mathrm{d}x, \quad v = \tan x,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^{۲} x \mathrm{d}x = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^{۲} x - ۱) \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^{۳} x \mathrm{d}x + \int \sec x \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \mathcal{I} + \ln|\sec x + \tan x| + c, \end{aligned}$$

لذا داریم

$$\mathcal{I} = \frac{۱}{۲} \sec x \cdot \tan x + \frac{۱}{۲} \ln|\sec x + \tan x| + c.$$

نکته (انتگرال‌گیری جزء به جزء به روش تشکیل جدول)**.** روش انتگرال‌گیری جزء به جزء را می‌توان در مورد انتگرال‌هایی به شکل $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x$ به‌کار برد. اگر تابع f طوری باشد که بعد از تعداد متناهی مرحله مشتق گرفتن صفر شود و از g هم بتوان بدون هیچ مشکلی بارها انتگرال گرفت آن‌گاه می‌توان انتگرال‌گیری را به کمک تشکیل جدول انجام داد. به عنوان مثال، انتگرال $\int x^{۲} e^{x} \mathrm{d}x$ را در نظر بگیرید:

مثال ۵.۴.۶. رابطه‌ای بازگشتی برای انتگرال $\mathcal{I}_n = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^n x\mathrm{d}x$، $n = ۰, ۱, \ldots$ بیابید و با استفاده از آن، مقادیر $\mathcal{I}_۶$ و $\mathcal{I}_۷$ را محاسبه کنید.

مثال ۶.۴.۶. رابطه‌ای بازگشتی برای انتگرال زیر بیابید.

$$\mathcal{I}_n = \int \frac{x^n \mathrm{d}x}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

مثال ۷.۴.۶. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \int_{۰}^{۱} \frac{nx^{n-۱}\mathrm{d}x}{۱ + x},$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

مثال ۸.۴.۶. اگر تابع f بر $[a, b]$ دو بار مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b) = ۰$، نشان دهید

$$\int_a^b (x - a)(b - x) f''(x)\mathrm{d}x = -۲ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

۴.۴.۶ انتگرال توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند را تابع گویا (کسری) می‌نامند. اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر بیشتر باشد، با تقسیم صورت کسر به مخرج آن، تابع گویای $f(x)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

که در آن $P_1(x)$ و $P_2(x)$ چندجمله‌ای بوده و درجه $P_2(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر است. با توجه به اینکه $\int P_1(x)\mathrm{d}x$ به‌آسانی محاسبه می‌شود، برای محاسبه $\int f(x)\mathrm{d}x$ کافی‌است انتگرال $\int \dfrac{P_2(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ را محاسبه کرد. بدون خلل به کلیت می‌توان فرض کرد درجه $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر است و با استفاده از قضیه زیر انتگرال $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ را محاسبه کرد.

قضیه ۳.۴.۶. فرض کنید P و Q دو چندجمله‌ای حقیقی با ضرایب حقیقی باشند و درجه P کمتر از درجه Q باشد. در این صورت

(الف) می‌توان $Q(x)$ را به حاصل‌ضرب ثابتی مانند k، عوامل خطی حقیقی مانند $x - a_i$ و عوامل درجه دومی مانند $x^2 + b_i x + c_i$ که ریشه حقیقی ندارند، تجزیه کرد. بعضی از عوامل خطی و درجه دوم ممکن است تکرار شوند، یعنی

$$\begin{aligned} Q(x) = k(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_j)^{m_j} \\ \times(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}(x^2+b_2x+c_2)^{n_2}\dots(x^2+b_kx+c_k)^{n_k}. \end{aligned}$$

درجه $Q(x)$ برابر $m_1 + m_2 + \dots + m_j + 2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_k$ است.

(ب) تابع گویای $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را می‌توان به شرح زیر به صورت مجموع کسرهای جزئی بیان کرد

(i) متناظر با هر یک از عوامل $(x-a)^m$ که در $Q(x)$ قرار دارد، تجزیه بالا حاوی مجموع کسرهای جزئی به شکل زیر است

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2}\dots + \frac{A_m}{(x-a)^m},$$

(ii) متناظر با هر یک از عوامل $(x^۲+bx+c)^n$ که در $Q(x)$ قرار دارد، تجزیه بالا حاوی مجموع کسرهای جزئی به شکل زیر است

$$\frac{B_۱x+C_۱}{x^۲+bx+c}+\frac{B_۲x+C_۲}{(x^۲+bx+c)^۲}+\dots+\frac{B_nx+C_n}{(x^۲+bx+c)^n},$$

ثابت‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_m، $B_۱$، $B_۲$، ...، B_n، $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n را می‌توان با جمع کردن کسرهای موجود در تجزیه و مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های مشابه x در صورت کسر حاصل و در چندجمله‌ای $P(x)$ تعیین کرد.

در محاسبه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ با چهار نوع انتگرال به صورت زیر سر و کار داریم

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|+c,$$

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}$, $(n\neq ۱)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=\frac{۱}{(۱-n)(x-a)^{n-۱}}+c,\quad n\neq ۱,$$

- $\int \frac{Bx+C}{x^۲+bx+c}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^۲+bx+c}\mathrm{d}x &= \frac{B}{۲}\int \frac{۲x+b}{x^۲+bx+c}\mathrm{d}x+\left(C-\frac{Bb}{۲}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^۲+bx+c}\\ &= \frac{B}{۲}\ln|x^۲+bx+c|\\ &\quad +\left(C-\frac{Bb}{۲}\right)\frac{۱}{\sqrt{c-\frac{b^۲}{۴}}}\tan^{-۱}\left(\frac{x+\frac{b}{۲}}{\sqrt{c-\frac{b^۲}{۴}}}\right)+\alpha,\end{aligned}$$

- $\int \frac{Bx+C}{(x^۲+bx+c)^n}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^۲+bx+c)^n}\mathrm{d}x=\frac{B}{۲}\int \frac{۲x+b}{(x^۲+bx+c)^n}\mathrm{d}x+\left(C-\frac{Bb}{۲}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^۲+bx+c)^n},$$

انتگرال $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x$ به‌آسانی قابل محاسبه است. بنابراین کافی‌است انتگرال $\mathcal{I}_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^n}$ را محاسبه کنیم. با فرض $t = x + \frac{b}{2}$ و $a = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a^2}\mathcal{I}_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

فرض کنید $u = t$ و $\mathrm{d}v = \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$. در این صورت

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}t, \quad v = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}},$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n &= \frac{1}{a^2}\left(\mathcal{I}_{n-1} - \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{a^2}\left[\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)\mathcal{I}_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}\right].\end{aligned}$$

نکته. اگر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ دارای تجزیه‌ای به کسرهای جزئی به صورت

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} \ldots + \frac{A_n}{x-a_n},$$

باشد، دو روش برای تعیین ثابت‌های A_1، A_2، ...، A_n وجود دارد.

روش اول: کسرها را با هم جمع کرده و کسر جدیدی مانند $\frac{S(x)}{Q(x)}$ بدست می‌آوریم که در آن $S(x)$ یک چندجمله‌ای با درجه یک واحد کمتر از درجه $Q(x)$ است. کسر جدید با کسر اولیه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ هنگامی یکی خواهد بود که دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $S(x)$ یکسان باشند. از حل دستگاه معادلات خطی حاصل از مساوی قرار دادن ضرایب توان‌های مشابه x در دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $S(x)$ ثابت‌های A_1، A_2، ...، A_n بدست می‌آیند.

روش دوم: با ضرب طرفین تجزیه به کسرهای جزئی در عبارت $x-a_j$ داریم

$$(x-a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} = A_1\frac{x-a_j}{x-a_1} + A_2\frac{x-a_j}{x-a_2} + \dots + A_{j-1}\frac{x-a_j}{x-a_{j-1}}$$
$$+A_j + A_{j+1}\frac{x-a_j}{x-a_{j+1}} + \dots + A_n\frac{x-a_j}{x-a_n}.$$

همه جملات طرف راست جز جمله jام، یعنی A_j، به ازای $x=a_j$ صفر می‌شوند. بنابراین، به ازای $1 \leq j \leq n$ داریم

$$\begin{aligned} A_j &= \lim_{x\to a_j}(x-a_j)\frac{P(x)}{Q(x)} \\ &= \frac{P(a_j)}{(a_j-a_1)(a_j-a_2)\dots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\dots(a_j-a_n)}. \end{aligned}$$

مثال ۹.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int \frac{x}{2x-1}\mathrm{d}x, \quad \text{(iii)} \int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x,$$
$$\text{(iv)} \int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x, \quad \text{(v)} \int \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x, \quad \text{(vi)} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x,$$

۵.۴.۶ انتگرال توابع اصم

هدف محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})\mathrm{d}x$ است که در آن R تابعی گویا از عبارت‌های $x^{\frac{m}{n}}$، ... $x^{\frac{r}{s}}$ و توان‌های صحیح x است و m، n، r، s، ... اعدادی صحیح هستند. اگر k کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرهای $\frac{m}{n}$، ...، $\frac{r}{s}$ باشد، با تغییر متغیر $t = x^{\frac{1}{k}}$ یا $x = t^k$ توان‌های کسری x به توان‌های صحیح از t تبدیل شده و در نتیجه عبارت داخل انتگرال به صورت تابعی گویا از t نوشته می‌شود که این انتگرال را می‌توان با استفاده از روش‌های بیان شده در بخش قبل محاسبه کرد.

مثال ۱۰.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}, \quad \text{(ii)}\ \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x, \quad \text{(iii)}\ \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$$

تبصره. برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) \mathrm{d}x$$

که در آن R تابعی گویا از عبارت‌های $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}$، $\dots$، $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$ و توان‌های صحیح x است و m، n، r، s، $\dots$ اعدادی صحیح هستند به صورت زیر عمل می‌کنیم:
اگر k کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرهای $\frac{m}{n}$، $\dots$، $\frac{r}{s}$ باشد، با تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ یک تابع گویا بر حسب t بدست می‌آید که این انتگرال را می‌توان با استفاده از روش‌های بیان شده در بخش قبل محاسبه کرد.

مثال ۱۱.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \text{(ii)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} \mathrm{d}x, \quad \text{(iii)} \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \mathrm{d}x$$

۶.۴.۶ انتگرال توابع مثلثاتی

برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$ در حالتی که R یک تابع گویا از توابع $\sin x$ و $\cos x$ باشد از تغییر متغیر $t = \tan \frac{x}{۲}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\mathrm{d}t = \frac{۱}{۲}\left(۱ + \tan^{۲}\frac{x}{۲}\right)\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲}(۱ + t^{۲})\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{۲\mathrm{d}t}{۱ + t^{۲}},$$

و

$$\sin x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱ + \tan^{۲}\frac{x}{۲}} = \frac{۲t}{۱ + t^{۲}}, \quad \cos x = \frac{۱ - \tan^{۲}\frac{x}{۲}}{۱ + \tan^{۲}\frac{x}{۲}} = \frac{۱ - t^{۲}}{۱ + t^{۲}}.$$

لذا می‌توان نوشت

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{۲t}{۱ + t^{۲}}, \frac{۱ - t^{۲}}{۱ + t^{۲}}\right)\frac{۲\mathrm{d}t}{۱ + t^{۲}},$$

که در آن انتگرال سمت راست، انتگرال یک تابع گویا است.

مثال ۱۲.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}, \quad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{۲ + \sin x + \cos x}, \quad \text{(iii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{۱ + \sin^{۲} x}$$

تبصره. برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int R(\sin x)\cos x \mathrm{d}x$ یا $\int R(\cos x)\sin x \mathrm{d}x$ به‌ترتیب از تغییر متغیرهای $t=\sin x$ و $t=\cos x$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۳.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)}\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}, \quad \text{(ii)}\ \int \frac{\cos^{3} x}{\sin^{4} x}\mathrm{d}x$$

تبصره. برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$ که در آن $m,n\in\mathbb{Z}$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

(الف) اگر حداقل یکی از اعداد m و n فرد باشند، با تغییر متغیر $t=\sin x$ یا $t=\cos x$ انتگرال را محاسبه می‌کنیم. به عنوان مثال، فرض کنید $n=2k+1$. در این صورت

$$\sin^m x\cos^n x=\sin^m x(1-\sin^2 x)^k\cos x=R(\sin x)\cos x,$$

که با استفاده از تغییر متغیر $t=\sin x$، مقدار انتگرال محاسبه می‌شود.

(ب) اگر m و n هر دو نامنفی و زوج باشند. در این صورت با فرض $m=2l$ و $n=2k$

داریم
$$\sin^m x \cos^n x = \left(\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}\right)^l \left(\frac{۱ + \cos ۲x}{۲}\right)^k,$$
پس از به‌توان رساندن و ضرب پرانتزها، به جملات $\cos ۲x$ با توان‌های زوج و فرد می‌رسیم. برای جملات با توان‌های فرد از حالت (الف) و برای جملات با توان‌های زوج از حالت (ب) استفاده می‌کنیم.

(پ) اگر m و n زوج بوده و حداقل یکی از آن‌ها منفی باشد آن‌گاه از تغییر متغیر $t = \tan x$ یا $t = \cot x$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۴.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.
$$\text{(i)} \int \cos^۴ x \mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^۴ x}$$

تبصره. برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int R(\tan x)\mathrm{d}x$ یا $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\mathrm{d}x$ با استفاده از تغییر متغیر $t = \tan x$، این انتگرال‌ها را به صورت زیر به انتگرال‌های توابع گویا بر حسب t تبدیل می‌کنیم:

$$\mathrm{d}t = (1 + \tan^2 x)\mathrm{d}x = (1 + t^2)\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2},$$

و

$$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

لذا می‌توان نوشت

$$\int R(\tan x)\mathrm{d}x = \int \frac{R(t)}{1 + t^2}\mathrm{d}t,$$

و

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{t^2}{1 + t^2}, \frac{1}{1 + t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}.$$

مثال ۱۵.۴.۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{(i)} \int \cot^5 x\mathrm{d}x, \quad \text{(ii)} \int \tan^2 x \sin^2 x\mathrm{d}x$$

تبصره. برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$ ، $\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$ یا $\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx &= \frac{۱}{۲}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],\\
\cos mx \cos nx &= \frac{۱}{۲}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],\\
\sin mx \sin nx &= \frac{۱}{۲}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]
\end{aligned}$$

مثال ۶.۴.۱۶. انتگرال $\int \sin x \cos ۳x \mathrm{d}x$ را محاسبه کنید.

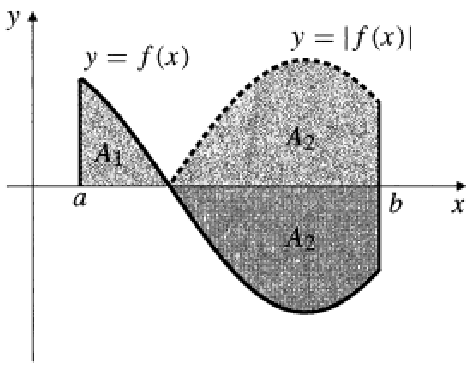
۵.۶ کاربردهای انتگرال

کمیت‌های بسیاری در ریاضیات، فیزیک، اقتصاد، زیست شناسی، علوم مهندسی و در حقیقت در هر علم کمی را می‌توان به‌طور مناسبی با انتگرال نمایش داد. علاوه بر اندازه‌گیری مساحت نواحی مسطح، یعنی مساله‌ای که انگیزه بخش تعریف انتگرال معین بود، می‌توان انتگرال‌های معین را برای حجم اجسام، طول خم‌ها، مساحت رویه‌ها، نیرو، کار، انرژی، فشار، احتمالات، ارزش پولی در جریان پرداخت‌ها و طیفی از کمیت‌های دیگر که به‌نحوی با محاسبه مساحت زیر نمودار هم ارز هستند، به‌کار برد.

۱.۵.۶ مساحت نواحی مسطح

مساحت یک ناحیه در مختصات قائم

در این بخش، کاربرد انتگرال معین را برای محاسبه مساحت نواحی مسطح بیان کرده و آن‌را تعمیم می‌دهیم. همان‌طور که در تعبیر هندسی انتگرال معین ملاحظه شد، $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ مساحت ناحیه محصور بین نمودار f و محور xها را از $x = a$ تا $x = b$ اندازه می‌گیرد البته هر قسمت از این مساحت را که زیر محور xها قرار دارد با علامت منفی نتیجه می‌دهد. برای بیان مساحت کل ناحیه محصور بین $y = f(x)$، $y = 0$، $x = a$ و $x = b$، یعنی احتساب همه مساحت‌ها با علامت مثبت، باید از قدرمطلق f انتگرال بگیریم



شکل ۶.۶

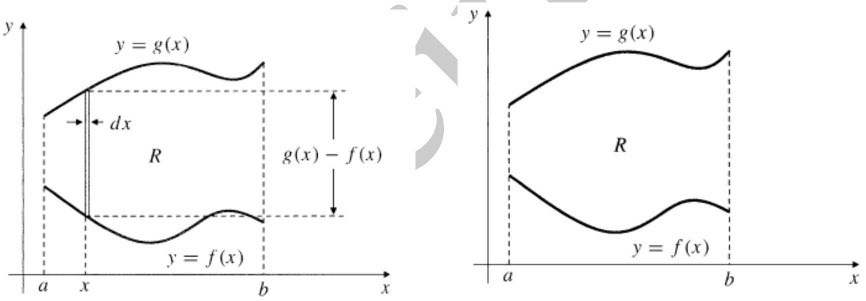
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2, \quad \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = A_1 + A_2,$$

قاعده‌ای برای محاسبه انتگرال $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ وجود ندارد. در حقیقت باید این انتگرال را به صورت مجموعی از انتگرال‌ها بر بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) > 0$ (و بنابراین، $|f(x)| = f(x)$) و بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) < 0$ (و بنابراین، $|f(x)| = -f(x)$) تجزیه کرد.

سطح محصور بین دو منحنی

فرض کنید ناحیه مسطح R بین نمودارهای توابع پیوسته $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ محصور باشد. همچنین فرض کنید بر بازه $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$. به عبارت دیگر نمودار f زیر نمودار g قرار گیرد. اگر بر بازه $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$، مساحت R برابر است با مساحت ناحیه بالای محور xها و زیر نمودار g منهای مساحت بالای محور xها و زیر نمودار f، یعنی،

$$A = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x,$$



شکل ۷.۶ ناحیه R محصور بین دو نمودار–عنصر سطح ناحیه R

می‌توان این‌طور تصور کرد که رابطه بالا، A را به صورت "مجموع" (یعنی انتگرال) تعدادی نامتناهی عنصر سطح

$$\mathrm{d}A = (g(x) - f(x))\mathrm{d}x,$$

بیان می‌کند که در آن، xها بین a و b قرار گرفته‌اند. هر یک از عنصرهای سطح، مساحت مستطیل قائم بی‌نهایت باریکی به عرض $\mathrm{d}x$ و ارتفاع $g(x) - f(x)$ در نقطه x است حتی اگر f و g بر بازه $[a, b]$ مقادیر منفی اختیار کنند، این تعبیر فرمول بدست آمده برای مساحت

را معتبر می‌سازد مشروط بر اینکه بر بازه $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$. زیرا در این صورت، هر عنصر سطح دارای مساحت مثبت است. استفاده از انتگرال برای نشان دادن یک کمیت به صورت **مجموع عنصرهای دیفرانسیل** (یعنی مجموع تکه‌های کوچک آن کمیت) رهیافت بسیار سودمندی است که در بخش‌های بعد مکرراً از آن استفاده خواهیم کرد.

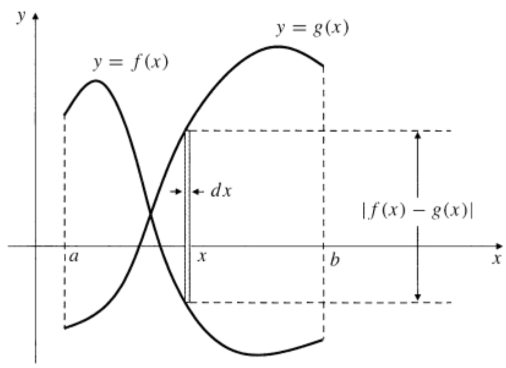
در حالت کلی، اگر از محدودیت $f(x) \leq g(x)$ چشم پوشی کنیم آن‌گاه مستطیل قائم به عرض $\mathrm{d}x$ در مکان x که بین نمودارهای f و g قرار دارد دارای ارتفاع $|f(x) - g(x)|$ است. بنابراین مساحت آن برابر است با

$$\mathrm{d}A = |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$

لذا مساحت کل ناحیه واقع بین نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ (شکل ۸.۶) با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x$$

برای محاسبه این انتگرال باید بازه‌هایی را تعیین کنیم که بر آن‌ها $f(x) > g(x)$ یا $f(x) < g(x)$. سپس انتگرال بالا را به صورت مجموع انتگرال‌هایی بر این بازه‌ها تجزیه کنیم.



شکل ۸.۶ یک عنصر سطح برای ناحیه بین $y = f(x)$ و $y = g(x)$

مثال ۱.۵.۶. مساحت محدود به نمودار تابع $y = \tan^{-1} x$، محور xها و خط $x = 1$ را بدست آورید.

مثال ۲.۵.۶. مساحت ناحیه محدود به محور yها، خط $x = \frac{\pi}{4}$، بالای نمودار $y = \sin x$ و زیر نمودار $y = \cos x$ را بدست آورید.

مثال ۳.۵.۶. اندازه سطح محصور بین منحنی‌های $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و $x + y = 1$ را بیابید.

مثال ۴.۵.۶. مساحت ناحیه‌ای از صفحه که بین دو منحنی نمایش تابع $y^2 = 2x$ و $x^2 = 2y$ و درون دایره $x^2 + y^2 = 3$ قرار دارد را محاسبه کنید.

مساحت یک ناحیه وقتی معادلات پارامتری منحنی معلوم باشند

اگر منحنی C با نمایش پارامتری $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ یک منحنی جهتدار بسته باشد که از تغییر t در بازه $[\alpha, \beta]$ رسم می‌شود و جهت منحنی طوری باشد که اگر متحرکی روی منحنی حرکت کند ناحیه داخل منحنی در سمت چپ متحرک قرار گیرد آن‌گاه مساحت سطح داخل منحنی توسط یکی از روابط زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} A &= \int_{\alpha}^{\beta} g'(t)f(t)\mathrm{d}t, \\ A &= -\int_{\alpha}^{\beta} g(t)f'(t)\mathrm{d}t, \\ A &= \frac{۱}{۲}\int_{\alpha}^{\beta} [g'(t)f(t) - g(t)f'(t)]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

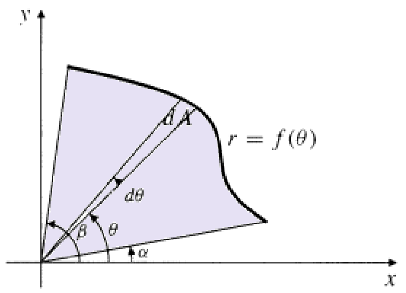
مثال ۶.۵.۵. مساحت بیضی $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ را بیابید.

مثال ۶.۵.۶. مساحت محدود توسط منحنی پارامتری $\begin{cases} x = a\cos^{۳} t, \\ y = a\sin^{۳} t, \end{cases}$ که در آن $a > ۰$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$، را بیابید.

مثال ۶.۵.۷. مساحت بالای محور xها، و زیر یک طاق چرخزاد $\begin{cases} x = at - a\sin t, \\ y = a - a\cos t, \end{cases}$ را بیابید.

مساحت یک ناحیه در مختصات قطبی

هدف یافتن مساحت ناحیه‌ای مانند R که محصور به نمودار قطبی $r = f(\theta)$ و دو نیم‌خط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ است.
فرض کنید $r = f(\theta)$ در بازه $[\alpha, \beta]$ پیوسته و نامنفی باشد. اگر $\mathcal{P} = \{\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n\}$ افرازی از بازه $[\alpha, \beta]$ باشد آن‌گاه $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \beta$ و $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ زاویه بین $\theta = \theta_{i-1}$ و $\theta = \theta_i$ است. فرض کنید ξ_i زاویه‌ای دلخواه بین θ_{i-1} و θ_i باشد. مساحت ناحیه محصور به منحنی و دو شعاع حامل $\theta = \theta_{i-1}$ و $\theta = \theta_i$ به‌طور تقریبی برابر است با مساحت قطعه‌ای از دایره به مرکز O، شعاع $f(\xi_i)$ و به زاویه مرکزی $\Delta\theta_i$ که این مقدار نیز برابر $\Delta A_i = \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta\theta_i$ است.



شکل ۹.۶ عنصر سطح در مختصات قطبی

لذا مساحت ناحیه A تقریباً برابر است با

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta\theta_i,$$

هر چه تعداد تقسیمات زیاد باشد یعنی n بزرگتر باشد آن‌گاه مجموع بالا به مساحت A نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین حد این مجموع وقتی $\max \Delta\theta_i \to 0$ برابر مساحت ناحیه A است. به عبارت دیگر

$$A = \lim_{\max \Delta\theta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

تبصره. اگر توابع $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ در بازه $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشند و $g(\theta) \leq f(\theta)$ آن‌گاه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ و نیم‌خط‌های $\theta = \alpha$

و $\theta = \beta$ برابر است با

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f^{2}(\theta) - g^{2}(\theta)] \mathrm{d}\theta.$$

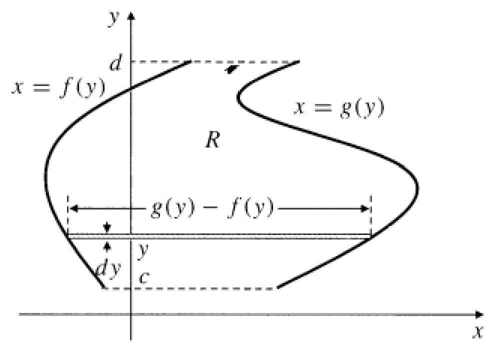
مثال ۸.۵.۶. مساحت ناحیه محصور به دل‌نمای $r = a(1 + \cos\theta)$ را بیابید.

مثال ۹.۵.۶. مساحت ناحیه محصور در درون دایره $r = \sqrt{2}\sin\theta$ و پروانه $r^{2} = \sin 2\theta$ را بیابید.

مثال ۱۰.۵.۶. مساحت ناحیه واقع در خارج دل‌نمای $r = a(1 - \cos\theta)$ و داخل دایره $r = a$ را بیابید.

گاهی بهتر است به‌جای عنصرهای قائم سطح، عنصرهای افقی سطح به‌کار روند و به‌جای انتگرال‌گیری بر بازه‌ای از محور xها، انتگرال‌گیری بر بازه‌ای از محور yها مورد استفاده قرار گیرد. این حالت معمولاً وقتی روی می‌دهد که ناحیه مورد نظر، بین خم‌هایی محصور شده باشد که معادلات آن‌ها بر حسب تابعی از y بیان شده‌اند. ناحیه R که در طرف راست $x = f(y)$ و در طرف چپ $x = g(y)$ و بین خطوط افقی $y = c$ و $y = d$ قرار گرفته است، دارای عنصر سطح $\mathrm{d}A = (g(y) - f(y))\mathrm{d}y$ است و مساحت آن عبارت است از

$$A = \int_c^d (g(y) - f(y))\mathrm{d}y$$



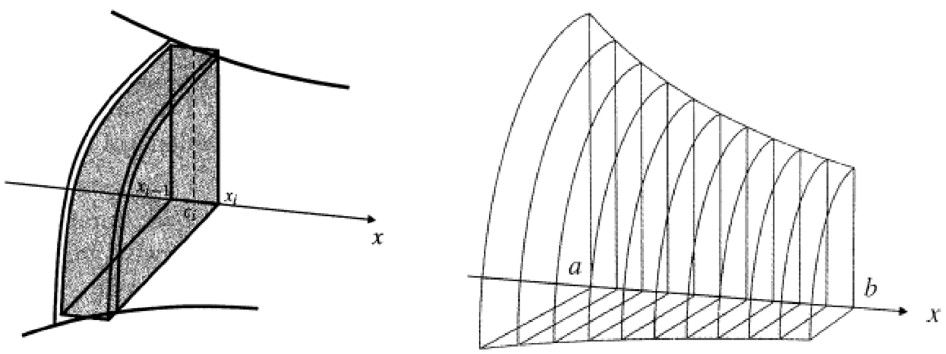
شکل ۶.۱۰ عنصر سطح افقی

مثال ۶.۵.۱۱. مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی $x = y^۲ - ۱۲$ و $y = x$ را بیابید.

۲.۵.۶ حجم

محاسبه حجم با استفاده از برش

فرض کنید S جسمی توپر محصور به صفحات قائم $x = a$ و $x = b$ باشد و مساحت مقطع عرضی S واقع در صفحه عمود بر محور xها در نقطه x، تابع معین و پیوسته‌ای مانند $A(x)$، $a \leq x \leq b$ باشد. فرض کنید $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ یک افراز از بازه $[a, b]$ باشد. از هر زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$، $1 \leq i \leq n$، نقطه اختیاری ξ_i را انتخاب و صفحه‌ای را به‌طور قائم بر محور xها در آن نقطه رسم کنید.



شکل ۱۱.۶ برش دادن جسمی با صفحات عمود بر یک محور – حجم یک برش

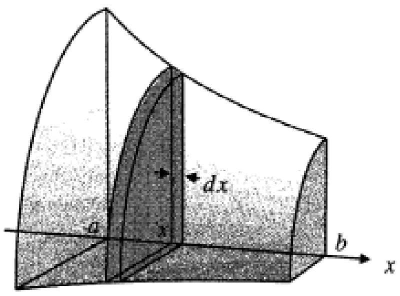
فرض کنید مساحت برش حاصل برابر $A(\xi_i)$ باشد. در این صورت، حجم ناحیه محصور به جسم و صفحات $x = x_{i-1}$ و $x = x_i$ تقریباً برابر حجم استوانه‌ای به قاعده $A(\xi_i)$ و ارتفاع $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ یعنی $\Delta v_i = A(\xi_i)\Delta x_i$ است. بنابراین حجم جسم S تقریباً برابر مجموع حجم این استوانه‌ها است. لذا اگر تعداد تقسیمات زیاد باشد، مجموع حجم استوانه‌ها به حجم جسم نزدیک‌تر می‌شود. لذا وقتی n را طوری به بی‌نهایت میل دهیم که $\max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$ به صفر میل کند آن‌گاه حد مجموع استوانه‌ها برابر حجم جسم S خواهد شد، یعنی،

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

روش دیگر برای بدست آوردن این رابطه به صورت زیر است:
برشی از جسم را که بین صفحات عمود بر محور xها در نقاط x و $x + \Delta x$ واقع شده است در نظر بگیرید. چون $A(x)$ پیوسته است، در یک بازه کوچک چندان تغییر نمی‌کند.

ازاین‌رو، اگر Δx کوچک باشد این برش دارای حجمی مانند Δv است که تقریباً برابر است با حجم استوانه‌ای با مساحت قاعده $A(x)$ و ارتفاع Δx، یعنی،

$$\Delta v \approx A(x)\Delta x,$$



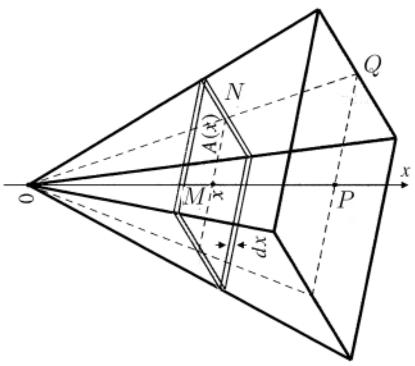
شکل ۱۲.۶ عنصر حجم

خطای این تقریب در مقایسه با اندازه Δv کوچک است. این مطلب دقیقاً به این معنی است که عنصر حجم، یعنی حجم برش بی‌نهایت نازک به ضخامت $\mathrm{d}x$ برابر است با $\mathrm{d}v = A(x)\mathrm{d}x$ و حجم جسم برابر است با مجموع همه این عنصرهای حجمی که بین دو انتهای جسم در $x = a$ و $x = b$ قرار گرفته‌اند، یعنی،

$$V = \int_a^b \mathrm{d}v = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

مثال ۱۲.۵.۶. حجم هرمی را بدست آورید که ارتفاع آن h و قاعده آن مربعی به ضلع a است.

جواب. رأس هرم را مبدأ مختصات و قاعده آن‌را عمود بر محور xها در نظر بگیرید به‌طوری‌که محور xها از مرکز قاعده بگذرد. اگر P محل تقاطع محور xها با قاعده باشد آن‌گاه مختصات نقطه P برابر است با $(h, \circ)$. از نقطه P خطی را به‌طور قائم رسم می‌کنیم تا قاعده را در نقطه Q قطع کند. اگر x نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط باشد، صفحه قائم بر محور xها در این نقطه را در نظر بگیرید. اگر این صفحه محور xها را در نقطه M و خط



شکل ۱۳.۶ هرمی با قاعده مربعی

$\overline{OQ}$ را در نقطه N قطع کند آن‌گاه از تشابه دو مثلث OPQ و OMN می‌توان نوشت

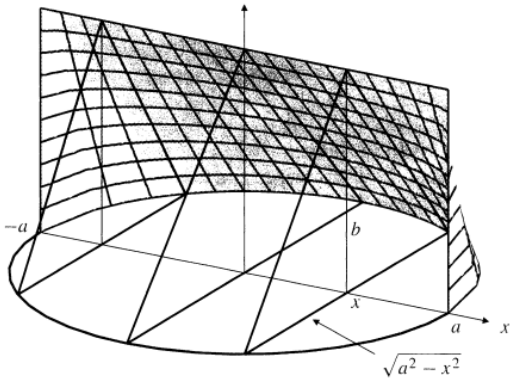
$$\frac{x}{h} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{MN}}{a/۲}$$

لذا $۲\overline{MN} = \frac{ax}{h}$ و $A(x) = \left(\frac{ax}{h}\right)^۲$. بنابراین داریم

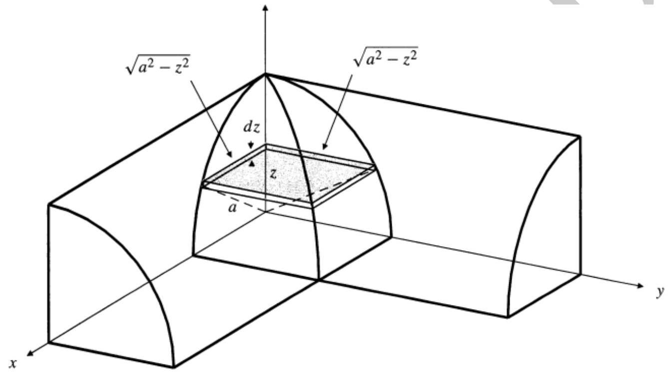
$$V = \frac{a^۲}{h^۲}\int_۰^h x^۲ \mathrm{d}x = \frac{۱}{۳}a^۲ h.$$

مثال ۱۳.۵.۶. چادری که قاعده آن دایره‌ای به شعاع a متر است با یک میله افقی به فاصله b متر بالای یکی از قطرهای قاعده که بر دو میله قائم در دو انتهای قطر تکیه دارد، برپا شده است. پارچه چادر محکم کشیده شده است به‌طوری‌که هر مقطع عرضی عمود بر میله بالایی، یک مثلث متساوی الساقین است. حجم چادر را بیابید.

مثال ۱۴.۵.۶. دو استوانه دایره‌ای هر یک به شعاع a، یکدیگر را طوری قطع کرده‌اند که محورهای آن با هم زاویه قائمه تشکیل داده‌اند. حجم ناحیه‌ای را که درون هر دو استوانه قرار دارد، بیابید.



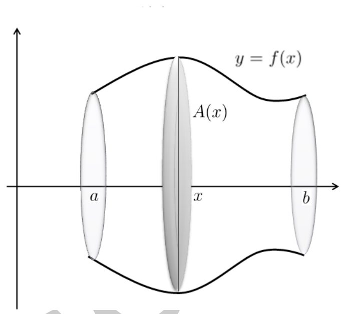
شکل ۱۴.۶ چادر مثال ۱۳.۵.۶ که در آن قسمت جلو برای واضح‌تر دیده شدن، حذف شده است



شکل ۱۵.۶ یک هشتم جسمی که درون دو لوله استوانه‌ای عمود بر هم قرار دارد

۳.۵.۶ حجم اجسام دوار

بسیاری از اجسام معمولی به گونه‌ای هستند که اگر آن‌ها را با صفحات عمود بر محور معینی قطع کنیم، مقاطع عرضی دایره‌ای بدست می‌آیند. این نوع اجسام را اجسام دوار می‌نامند زیرا آن‌ها را می‌توان از دوران یک ناحیه مسطح حول یک محور واقع در آن صفحه بدست آورد. به عنوان مثال، یک جسم کروی از دوران یک نیم قرص حول قطرش بدست می‌آید. به‌طور مشابه، یک مخروط دایره‌ای قائم از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه قائمه تولید می‌شود.
اگر ناحیه R محصور بین $y = f(x)$، $y = 0$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور xها دوران کند آن‌گاه مقطع عرضی جسم حاصل واقع در صفحه عمود بر محور xها در نقطه x، قرصی به شعاع $|f(x)|$ است. مساحت این مقطع عرضی برابر $A(x) = \pi[f(x)]^2$ است. لذا حجم جسم دوار عبارت است از



شکل ۱۶.۶

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

در حالت کلی، اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ توابعی پیوسته در بازه $[a, b]$ باشند و در این بازه داشته باشیم $f(x) \geq g(x) \geq 0$ آن‌گاه جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین $f(x)$ و $g(x)$ و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ حول محور xها برابر است با

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] \mathrm{d}x.$$

تبصره. اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته و نامنفی در بازه $[a, b]$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از

دوران منحنی $f(x)$ حول خط $y=k$ برابر است با $V=\pi\int_a^b (f(x)-k)^2 \mathrm{d}x$.

تبصره. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند و $g(x)\leq 0\leq f(x)$ آن‌گاه حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین دو منحنی در بازه $[a,b]$ حول محور xها برابر است با $V=\pi\int_a^b h^2(x)\mathrm{d}x$ که در آن $h(x)=\max\{f(x),-g(x)\}$.

تبصره. اگر A ناحیه محصور بین $x=f(y)$، محور yها و خطوط افقی $y=c$ و $y=d$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از دوران ناحیه A حول محور yها برابر است با $V=\pi\int_c^d f^2(y)\mathrm{d}y$.

مثال ۱۵.۵.۶. حجم جسمی کروی به شعاع a را بیابید.

مثال ۱۶.۵.۶. حجم مخروط دایره‌ای قائم به شعاع قاعده r و ارتفاع h را که از دوران مثلثی با رأس‌های $(0,0)$، $(h,0)$ و (h,r) حول محور xها حاصل می‌شود را بیابید.

مثال ۱۷.۵.۶. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به محور xها و نمودار $f(x)=1-x^2$ حول خط $y=-1$ را بدست آورید.

مثال ۱۸.۵.۶. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه واقع در طرف راست محور yها و طرف چپ خم $x=2y-y^2$ حول محور yها را بیابید.

مثال ۱۹.۵.۶. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور بین سهمی $y^2=4x$ و خط $y=x$ حول خط $x=4$ را بیابید.

تبصره. اگر معادله منحنی به صورت پارامتری داده شده باشد، بهتر است برای محاسبه حجم مورد نظر معادله را به صورت $y = f(x)$ بنویسیم. سپس از فرمول‌های حجم استفاده کنیم ولی اگر تبدیل معادلات به صورت تابع $y = f(x)$ مشکل باشد و نمایش منحنی به شکل $\begin{cases} x = g(t), \\ y = h(t), \end{cases}$ که در آن $\alpha \leq t \leq \beta$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از دوران این منحنی حول محور xها از رابطه $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} h^{2}(t) g'(t) \mathrm{d}t$ بدست می‌آید. (در واقع، با تغییر متغیر $x = g(t)$ در رابطه $V = \pi \int_{a}^{b} y^{2} \mathrm{d}x$ می‌توان به رابطه فوق رسید.)

تبصره. اگر معادله منحنی در دستگاه مختصات قطبی و به شکل $r = f(\theta)$ داده شده باشد آن‌گاه برای بدست آوردن حجم حاصل از دوران این منحنی حول محور قطبی، ابتدا با استفاده از رابطه $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ معادله منحنی $r = f(\theta)$ را به شکل معادلات پارامتری $\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta, \\ y = f(\theta)\sin\theta, \end{cases}$ نوشته، سپس با استفاده از تبصره قبلی حجم را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۲۰.۵.۶. حجم حاصل از دوران آستروئید $\begin{cases} x = a\cos^{3} t, \\ y = a\sin^{3} t, \end{cases}$ که در آن $0 \leq t \leq 2\pi$ را حول محور xها بیابید.

مثال ۲۱.۵.۶. حجم حاصل از دوران دل‌نمای $r = a(1 + \cos\theta)$ حول محور قطبی را بدست آورید.

روش پوسته‌های استوانه‌ای برای محاسبه حجم اجسام دوار

فرض کنید ناحیه R، محصور بین $y=f(x)\geq \circ$، $y=\circ$ و خطوط $x=a\geq \circ$ و $x=b>a$، حول محور yها دوران کند و جسم دواری پدید آورد. برای محاسبه حجم این جسم با استفاده از برش‌ها(ی مسطح) به مقطع عرضی $A(y)$ واقع در هر صفحه به ارتفاع h نیاز داریم. لازمه این‌کار حل معادله $y=f(x)$ است. به‌این ترتیب یک یا چند جواب به صورت $x=g(y)$ بدست می‌آید. این روش در عمل ممکن است نامناسب باشد. برای اجتناب از این امر از روش پوسته‌های استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:
فرض کنید $\mathcal{P}=\{x_\circ,x_۱,\dots,x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ باشد. نقطه $\xi_i=\dfrac{x_{i-۱}+x_i}{۲}$ را به عنوان وسط زیربازه $[x_{i-۱},x_i]$ انتخاب کنید. در این صورت، حجم حاصل از دوران مستطیل به ارتفاع $f(\xi_i)$ و قاعده Δx_i حول محور y برابر است با

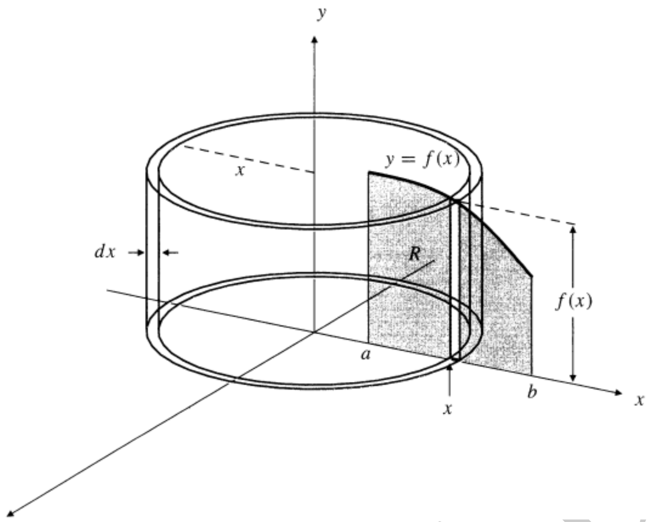
$$\Delta v_i=\pi f(\xi_i)(x_i^۲-x_{i-۱}^۲),$$

که در آن x_i شعاع خارجی و $x_{i-۱}$ شعاع داخلی این استوانه است. اگر سطح زیر منحنی تابع $f(x)$ در بازه $[x_{i-۱},x_i]$ را حول محور yها دوران دهیم یک پوسته استوانه‌ای تولید می‌شود که حجم این پوسته تقریباً برابر Δv_i است. هرچقدر طول زیربازه $[x_{i-۱},x_i]$ کوچکتر باشد حجم پوسته به Δv_i نزدیک‌تر می‌شود. بنابراین اگر V حجم حاصل از دوران سطح R حول محور yها باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}V&=\lim_{\max\Delta x_i\to\circ}\sum_{i=۱}^{n}\Delta v_i\lim_{\max\Delta x_i\to\circ}\sum_{i=۱}^{n}\pi f(\xi_i)(x_i^۲-x_{i-۱}^۲)\\&=۲\pi\lim_{\max\Delta x_i\to\circ}\sum_{i=۱}^{n}\xi_i f(\xi_i)\Delta x_i=۲\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

نکته. عنصر سطح متعارف R در x، نوار قائمی به عرض $\mathrm{d}x$، ارتفاع $f(x)$ و مساحت $\mathrm{d}A=f(x)\mathrm{d}x$ است. وقتی R حول محور yها دوران می‌کند این نوار حجمی به شکل یک پوسته استوانه‌ای دایره‌ای به شعاع x، ارتفاع $f(x)$ و ضخامت $\mathrm{d}x$ بوجود می‌آورد. این پوسته را مستطیل لوله شده‌ای به ابعاد $۲\pi x$، $f(x)$ و $\mathrm{d}x$ تلقی کنید که حجم آن عبارت است از $\mathrm{d}v=۲\pi xf(x)\mathrm{d}x$ و در نتیجه

$$V=\int_a^b\mathrm{d}v=۲\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$



شکل ۱۷.۶

تبصره. در حالت کلی، اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$، $a>0$ پیوسته باشد و R سطح محصور بین منحنی $f(x)$، محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از دوران سطح R حول محور yها برابر است با $V=2\pi\int_a^b x|f(x)|\mathrm{d}x$.

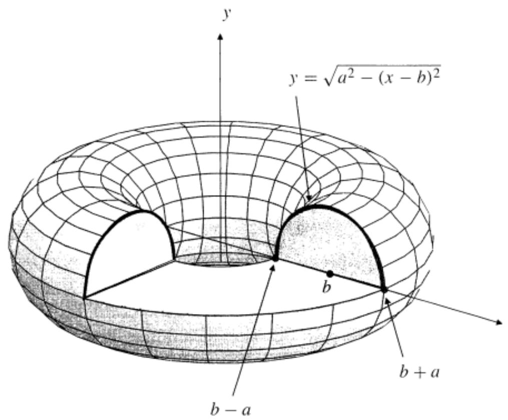
تبصره. اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$، $a>0$ پیوسته باشند و R سطح محصور بین دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $[a,b]$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از دوران سطح R حول محور yها برابر است با $V=2\pi\int_a^b x|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$.

تبصره. اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$، $a>0$ پیوسته باشد و R سطح محصور بین منحنی $f(x)$، محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از دوران سطح R حول خط $x=k$ $(k<a)$ برابر است با $V=2\pi\int_a^b (x-k)|f(x)|\mathrm{d}x$.

تبصره. اگر R ناحیه محصور به منحنی $x=f(y)$، محور yها و خطوط $y=c$ و $y=d$ باشد آن‌گاه حجم حاصل از دوران ناحیه R حول خط $y=k$ $(k<c)$ برابر است با $V=2\pi\int_a^b (y-k)|f(y)|\mathrm{d}y$.

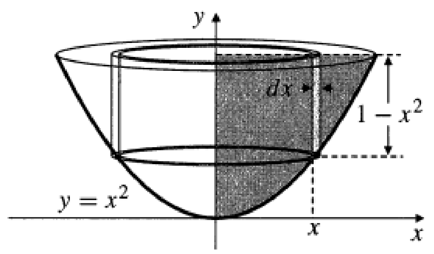
مثال ۲۲.۵.۶. حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی‌های $x=y^2$ و $y=x^2$ حول خط $x=-2$ را بیابید.

مثال ۲۳.۵.۶. حجم حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع a و مرکز $(b, ۰)$ که در آن $a < b$، حول محور yها را بیابید.



شکل ۱۸.۶ نمای برشی چنبره

مثال ۲۴.۵.۶. حجم جامی که از دوران کمان سهموی $y = x^۲$، $۰ \leq x \leq ۱$ حول محور yها تولید می‌شود را بیابید.



شکل ۱۹.۶ جام سهموی

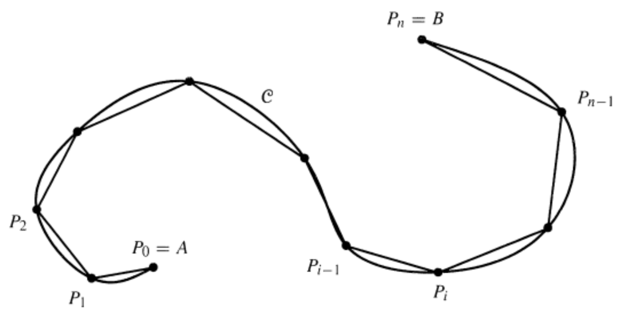
نکته. عنصر حجم $\mathrm{d}v$ را همیشه می‌توان با دوران عنصر سطح مناسبی نظیر $\mathrm{d}A$ حول محور دوران تعیین کرد. اگر ناحیه مورد بحث بین چند خط قائم و یک یا چند نمودار به صورت $y = f(x)$ محصور باشد عنصر سطح مناسب، نوار قائمی به عرض $\mathrm{d}x$ است. اگر دوران حول محور x یا هر خط افقی دیگری انجام گیرد، این نوار مولد برشی به شکل قرص یا واشری به ضخامت $\mathrm{d}x$ است. اگر دوران حول محور y یا هر خط قائم دیگری انجام گیرد، این نوار، مولد پوسته‌ای استوانه‌ای به ضخامت $\mathrm{d}x$ است. از طرف دیگر اگر ناحیه دوران یافته بین چند خط افقی و یک یا چند نمودار به صورت $x = g(y)$ محصور باشد، بهتر است نواری افقی به عرض $\mathrm{d}y$ به عنوان عنصر سطح به کار رود. اگر دوران حول یک خط قائم انجام گیرد، یک برش پدید آمده و اگر دوران حول یک خط افقی انجام گیرد، پوسته استوانه‌ای پدید می‌آید.

۴.۵.۶ طول قوس منحنی

اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند، فاصله بین آن‌ها، یعنی طول پاره خط راست AB را با نماد $|AB|$ نشان می‌دهند. فرض کنید خم $\mathcal{C}$ دو نقطه A و B را به هم وصل کرده باشد. در این صورت برای بدست آوردن فاصله بین این نقاط، طول خم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نقاط $A = P_0$، P_1، P_2، $\ldots$، $B = P_n$ را روی خم انتخاب کنید. خط شکسته $P_0P_1\ldots P_n$ که از وصل کردن هر دو نقطه مجاور با یک پاره خط بدست آمده است تقریبی برای $\mathcal{C}$ با خطوط شکسته است و طول این خط شکسته برابر است با

$$\mathcal{L}_n = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \ldots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|.$$



شکل ۲۰.۶ تقریب $\mathcal{C}$ با یک خط شکسته

به طور شهودی، واضح است که کوتاهترین خم واصل بین دو نقطه پاره خطی است که آن دو نقطه را به‌هم وصل کند. بنابراین طول هر تقریب $\mathcal{C}$ با خط شکسته از طول $\mathcal{C}$ بیشتر نیست. اگر با افزودن رأس‌های بیشتر به رأس‌های فوق، n را افزایش دهیم، $\mathcal{L}_n$ نمی‌تواند کوچکتر شود ولی ممکن است افزایش یابد. اگر عددی مانند k وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر تقریب $\mathcal{C}$ با خط شکسته داشته باشیم $\mathcal{L}_n \leq k$ آن‌گاه کوچکترین kای با این ویژگی وجود خواهد داشت. این کوچکترین k را طول $\mathcal{C}$ می‌نامیم.

تعریف ۱.۵.۶. طول قوس خم $\mathcal{C}$ از A تا B کوچکترین عدد حقیقی s است به‌طوری‌که طول هر تقریب $\mathcal{C}$ با خط شکسته در نامساوی $\mathcal{L}_n \leq s$ صدق کند.

تعریف ۲.۵.۶. هر خم دارای طول قوس متناهی را طول‌پذیر می‌نامیم. طول قوس آن، s، عبارت است از حد طول تقریب‌های $\mathcal{C}$ با خطوط شکسته (یعنی حد $\mathcal{L}_n$ها) به ازای $n \to \infty$، البته مشروط به اینکه ماکزیمم $|P_{i-1}P_i|$ به صفر میل کند.

تبصره. خم‌های پیوسته‌ای می‌توان ساخت که کراندار باشند (یعنی از هیچ طرفی به بی‌نهایت میل نکنند) ولی طول پذیر نباشند. این نوع خم‌ها دارای طول بی‌نهایت هستند. برای اجتناب از این نوع مسایل فرض خواهیم کرد خم‌ها هموار باشند، یعنی، با توابعی تعریف شوند که دارای مشتق پیوسته‌اند.

محاسبه طول قوس در مختصات دکارتی

فرض کنید تابع f بر بازه بسته کراندار $[a,b]$ معین و دارای مشتق پیوسته f' باشد. اگر $\mathcal{C}$ نمودار معادله $y = f(x)$ باشد آن‌گاه هر افراز از $[a,b]$ تقریبی برای $\mathcal{C}$ با خطوط شکسته نتیجه می‌شود. برای افراز $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ فرض کنید P_i، $0 \leq i \leq n$، نقطه $(x_i, f(x_i))$ باشد. در این صورت، طول خط شکسته $P_0P_1\ldots P_n$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n &= \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,\Delta x_i,\end{aligned}$$

که در آن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. بنا بر قضیه مقدار میانگین عددی مانند ξ_i در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} = f'(\xi_i),$$

لذا

$$\mathcal{L}_n = \sqrt{۱ + [f'(\xi_i)]^{۲}}\Delta x_i$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \to ۰} \mathcal{L}_n = \lim_{\max \Delta x_i \to ۰} \sum_{i=۱}^{n} \sqrt{۱ + [f'(\xi_i)]^{۲}}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{۱ + [f'(x)]^{۲}}\mathrm{d}x,$$

فرمول انتگرال‌گیری فوق را می‌توانید این‌طور تعبیر کنید که طول قوس $\mathcal{C}$، یعنی s، به صورت مجموع عنصرهای طول قوس بدست می‌آید

$$s = \int_a^b \mathrm{d}s, \quad \mathrm{d}s = \sqrt{۱ + [f'(x)]^{۲}}\mathrm{d}x.$$

تبصره. اگر تابع $x = g(y)$ و مشتق آن در بازه $[c, d]$ پیوسته باشند آن‌گاه طول قوس منحنی از نقطه $A(c, f(c))$ تا نقطه $B(d, f(d))$ برابر است با

$$s = \int_c^d \sqrt{۱ + [g'(y)]^{۲}}\mathrm{d}y.$$

تبصره. اگر تابع $y = f(x)$ و مشتق آن در بازه $[a, b]$ پیوسته باشند آن‌گاه برای هر x در بازه $[a, b]$، طول قوس منحنی $y = f(x)$ از نقطه $(a, f(a))$ تا نقطه $(x, f(x))$ برابر است با

$$s = \int_a^x \sqrt{۱ + [f'(t)]^{۲}}\mathrm{d}t,$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه فوق نسبت به x داریم

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{۱ + [f'(x)]^{۲}},$$

یا به‌طور معادل

$$(\mathrm{d}s)^{۲} = (\mathrm{d}x)^{۲} + (\mathrm{d}y)^{۲}.$$

مثال ۲۵.۵.۶. طول قوس خم‌های زیر را در فاصله داده شده بیابید.

(الف) $y = x^{\frac{۲}{۳}}$ از $x = ۱$ تا $x = ۸$؛

(ب) $y = \ln \dfrac{e^x - ۱}{e^x + ۱}$ از $x = ۲$ تا $x = ۴$؛

(پ) $۶xy = y^۴ + ۳$ از نقطه‌ای به عرض $y = ۱$ تا نقطه‌ای به عرض $y = ۲$؛

(ت) $y = x^۴ + \frac{۱}{۳۲x^۲}$ از $x = ۱$ تا $x = ۲$؛

مثال ۲۶.۵.۶. محیط بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ را که در آن $a \geq b > ۰$ بیابید.

طول قوس یک منحنی با معادلات پارامتری

فرض کنید ضابطه منحنی به صورت پارامتری $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ داده شده باشد که در آن $f(t)$ و $g(t)$ و مشتقات آن‌ها در بازه $[\alpha, \beta]$ پیوسته هستند و $a = f(\alpha)$ و $b = f(\beta)$. در این صورت با تغییر متغیر $x = f(t)$ داریم

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{۱ + \left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)^۲} f'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^۲ + [g'(t)]^۲}\mathrm{d}t.$$

مثال ۲۷.۵.۶. منحنی پارامتری $\begin{cases} x = a\cos^۳ t, \\ y = a\sin^۳ t, \end{cases}$ (که $a > ۰$) برای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ داده شده است. طول قوس منحنی را بیابید.

طول قوس یک منحنی در مختصات قطبی

فرض کنید معادله منحنی در دستگاه مختصات قطبی به صورت $r = f(\theta)$ باشد. بنابراین معادلات پارامتری آن به شکل $\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta, \\ y = f(\theta)\sin\theta, \end{cases}$ می‌باشد. فرض کنید θ در بازه $[\alpha, \beta]$ تغییر کند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} y'_\theta &= \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \\ x'_\theta &= \frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ {x'_\theta}^۲ + {y'_\theta}^۲ &= [f'(\theta)]^۲ + [f(\theta)]^۲ = r'^۲ + r^۲, \end{aligned}$$

لذا

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r'^{۲}+r^{۲}}\mathrm{d}\theta.$$

مثال ۲۸.۵.۶. طول قوس دل‌نمای $r=a(۱+\cos\theta)$ را بیابید.

۵.۵.۶ مساحت سطح اجسام دوار

وقتی یک خم مسطح حول خطی واقع در آن صفحه (در فضای سه بعدی) دوران می‌کند، رویه‌ای دوار پدید می‌آورد. به عنوان مثال، کره‌ای به شعاع a از دوران نیم‌دایره‌ای به شعاع a حول قطرش تولید می‌شود. فرض کنید تابع f و مشتق آن در بازه $[a,b]$ پیوسته و f نیز در این بازه نامنفی باشند. همچنین فرض کنید $\widehat{\mathrm{AB}}$ کمان حاصل از منحنی f در بازه فوق باشد. هدف محاسبه سطح جسم حاصل از دوران کمان $\widehat{\mathrm{AB}}$ حول محور xها است.
فرض کنید $\mathcal{P}=\{x_{۰},x_{۱},\ldots,x_n\}$ افرازی از بازه $[a,b]$ باشد. اگر طول وتر $P_{i-۱}P_i$ را با $|P_{i-۱}P_i|$ نشان دهیم آن‌گاه

$$\begin{aligned}|P_{i-۱}P_i|&=\sqrt{(x_i-x_{i-۱})^{۲}+(f(x_i)-f(x_{i-۱}))^{۲}}\\&=\sqrt{۱+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-۱})}{x_i-x_{i-۱}}\right)^{۲}}\Delta x_i,\end{aligned}$$

سطح حاصل از دوران وتر $P_{i-۱}P_i$ حول محور xها یک سطح مخروطی ناقص است که شعاع‌های دو طرف قاعده آن $f(x_{i-۱})$ و $f(x_i)$ هستند. مساحت این سطح مخروطی برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta s_i&=۲\pi\frac{f(x_{i-۱})+f(x_i)}{۲}|P_{i-۱}P_i|\\&=۲\pi\frac{f(x_{i-۱})+f(x_i)}{۲}\sqrt{۱+\left(\frac{f(x_i)-f(x_{i-۱})}{x_i-x_{i-۱}}\right)^{۲}}\Delta x_i,\end{aligned}$$

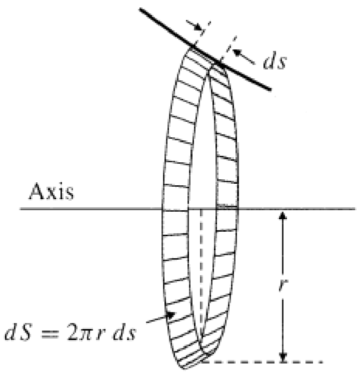
با توجه به قضیه مقدار میانگین داریم

$$\Delta s_i = ۲\pi \frac{f(x_{i-۱}) + f(x_i)}{۲} \sqrt{۱ + [f'(\xi_i)]^۲} \Delta x_i, \quad \xi_i \in (x_{i-۱}, x_i),$$

حد مجموع عبارت فوق وقتی $\max \Delta x_i \to ۰$ برابر مساحت سطح دوار حاصل از دوران کمان $\widehat{\mathrm{AB}}$ حول محور xها است، یعنی،

$$\begin{aligned} S &= ۲\pi \lim_{\max \Delta x_i \to ۰} \sum_{i=۱}^{n} \frac{f(x_{i-۱}) + f(x_i)}{۲} \sqrt{۱ + [f'(\xi_i)]^۲} \Delta x_i \\ &= ۲\pi \lim_{\max \Delta x_i \to ۰} \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i) \sqrt{۱ + [f'(\xi_i)]^۲} \Delta x_i \\ &= ۲\pi \int_a^b f(x) \sqrt{۱ + [f'(x)]^۲} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

تبصره. مساحت یک رویه دوار را می‌توان با انتگرال‌گیری از عنصر سطح $\mathrm{d}S$ که از دوران عنصر طول قوس خم مفروض، $\mathrm{d}s$، حول خط مفروض ساخته می‌شود، بدست آورد. اگر شعاع دوران عنصر طول قوس $\mathrm{d}s$ برابر $r(= f(x))$ باشد آن‌گاه جسم حاصل از دوران، نواری دایره‌ای به عرض $\mathrm{d}s$ و طول (محیط) $۲\pi r$ است. بنابراین مساحت این نوار برابر است با $\mathrm{d}S = ۲\pi r \mathrm{d}s = ۲\pi f(x) \sqrt{۱ + [f'(x)]^۲} \mathrm{d}x$. لذا



شکل ۲۱.۶ نوار دایره‌ای حاصل از دوران عنصر طول قوس $\mathrm{d}s$ حول محور مفروض

$$S = ۲\pi \int_a^b f(x) \sqrt{۱ + [f'(x)]^۲} \mathrm{d}x.$$

تبصره. مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ حول خط $y = k$ برابر است با

$$S = ۲\pi \int_a^b |f(x) - k| \sqrt{۱ + [f'(x)]^۲} \mathrm{d}x.$$

تبصره. فرض کنید $x = g(y)$ و مشتق آن در بازه $[c, d]$ پیوسته باشند. در این صورت، مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $x = g(y)$ در بازه $[c, d]$ از نقطه $(c, g(c))$ تا نقطه $(d, g(d))$ حول محور yها از رابطه زیر بدست می‌آید

$$S = ۲\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{۱ + [g'(y)]^۲} \mathrm{d}y.$$

تبصره. فرض کنید معادلات پارامتری منحنی به صورت $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ باشد که در آن $\alpha \leq t \leq \beta$. با استفاده از تغییر متغیر $x = f(t)$ داریم

$$S = ۲\pi \int_\alpha^\beta |g(t)| \sqrt{[f'(t)]^۲ + [g'(t)]^۲} \mathrm{d}t = ۲\pi \int_\alpha^\beta y \sqrt{x_t^۲ + y_t^۲} \mathrm{d}t.$$

تبصره. اگر معادله منحنی در دستگاه مختصات قطبی به شکل $r = f(\theta)$ باشد آن‌گاه با استفاده از معادلات پارامتری $\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta, \\ y = g(\theta)\sin\theta, \end{cases}$ داریم

$$S = ۲\pi \int_\alpha^\beta r \sin\theta \sqrt{r^۲ + r'^۲} \mathrm{d}\theta.$$

مثال ۲۹.۵.۶. مساحت سطح کره‌ای به شعاع a را بیابید.

مثال ۳۰.۵.۶. مساحت سطح منحنی‌های حاصل از دوران را در هر یک از حالات زیر بیابید.

(الف) قسمت خمیده مخروط دایره‌ای قائم به شعاع r و ارتفاع h حاصل از دوران پاره‌خط راست واصل بین $(۰, ۰)$ و (r, h) حول محور yها؛

(ب) $y^۲ = ۲x$ در بازه $[۰, ۲]$ حول خط $x = -\frac{۱}{۲}$؛

(پ) کره‌وار کشیده حاصل از دوران بیضی $x^۲ + ۴y^۲ = ۴$ حول محور xها؛

(ت) $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \end{cases}$ حول محور xها؛

(ث) $r = a(۱ + \cos\theta)$ حول محور xها.

۶.۵.۶ انتگرال‌های ناسره

تا اینجا با انتگرال‌های معینی به صورت $\mathcal{I} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ سروکار داشتیم که در آن انتگرال‌ده f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته بود. با توجه به اینکه چنین تابعی لزوماً کراندار است، $\mathcal{I}$ نیز لزوماً عددی کراندار است. اگر f تابعی مثبت باشد، $\mathcal{I}$ برابر مساحت یک ناحیه کراندار در صفحه است یعنی ناحیه‌ای که درون قرصی به مرکز مبدأ و شعاعی معین قرار می‌گیرد. انتگرال‌های فوق را سره می‌نامند. در عمل ممکن است با مسایلی مواجه شویم که شرایط فوق را نداشته باشند. به عنوان مثال، می‌توان انتگرال‌های $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ و $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ را در نظر گرفت که شرایط گفته شده را دارا نمی‌باشند. بنابراین مفهوم انتگرال را طوری تعمیم خواهیم داد که دو حالت زیر را در بر گیرد:

(یک) ممکن است داشته باشیم $a = -\infty$ یا $b = \infty$ یا هر دو؛

(دو) f ممکن است به ازای $x \to \infty$ یا $x \to b$ یا هر دو، کراندار نباشد.

انتگرال‌هایی که در (یک) صدق می‌کنند، **انتگرال‌های ناسره نوع اول** و انتگرال‌هایی که در (دو) صدق می‌کنند، **انتگرال‌های ناسره نوع دوم** می‌نامیم. اگر f مثبت باشد، هر دو انتگرال ناسره متناظر با مساحت ناحیه‌ای در صفحه که در جهت معینی تا بی‌نهایت ادامه دارد، هستند و بنابراین، ناحیه‌ای **بی‌کران** است.

انتگرال‌های ناسره نوع اول

مثال ۳۱.۵.۶. مساحت ناحیه A را که زیر خم $y = \frac{1}{x^2}$، بالای محور xها و طرف راست $x = 1$ قرار دارد را بیابید.

مثال ۳۲.۵.۶. مساحت ناحیه واقع در زیر $y = \frac{1}{x}$، بالای $y = 0$ و طرف راست $x = 1$ را بیابید.

تعریف ۳.۵.۶. اگر تابع f بر بازه $[a,+\infty)$ پیوسته باشد آن‌گاه انتگرال ناسره f بر $[a,+\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

اگر این حد موجود باشد، انتگرال را همگرا و در غیر این صورت آن‌را واگرا می‌نامند.
به طور مشابه، اگر f به‌ترتیب بر بازه‌های $(-\infty,b]$ و $(-\infty,+\infty)$ پیوسته باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

و

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

تبصره. انتگرال ناسره $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ را نمی‌توان به صورت

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x,$$

نوشت. به عنوان مثال، اگر $f(x)=x$ آن‌گاه $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^a x\mathrm{d}x = ۰$ در حالی‌که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^۰ x\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_۰^b x\mathrm{d}x = -\infty+\infty.$$

مثال ۳۳.۵.۶. مقدار انتگرال‌های ناسره زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{۱+x^۲},\qquad \text{(ii)}\ \int_۰^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$$

تعریف ۴.۵.۶. اگر تابع f در نقطه c تعریف نشده باشد یا در این نقطه کراندار نباشد ($\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$) و به ازای هر $b \in [a, c)$، $f(x)$ در بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه $\lim\limits_{b\to c^-} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ را انتگرال ناسره نوع دوم تابع f در بازه $[a, c)$ می‌نامند و آن‌را با نماد $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ نمایش می‌دهند. اگر $\lim\limits_{b\to c^-} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ موجود باشد آن‌گاه انتگرال را همگرا و در غیر این صورت آن‌را واگرا می‌نامند.

به طور مشابه، اگر f در نقطه c نامعین یا بی‌کران باشد و به ازای هر $a \in (c, b]$، $f(x)$ در بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه $\lim\limits_{a\to c^+} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ را انتگرال ناسره $f(x)$ در بازه $(c, b]$ می‌نامند و آن‌را با نماد $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ نمایش می‌دهند.

همچنین اگر c نقطه‌ای درون بازه $[a, b]$ باشد آن‌گاه $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

اگر هر دو انتگرال ناسره $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ و $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ همگرا باشند آن‌گاه $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ همگراست و اگر حداقل یکی از انتگرال‌ها واگرا باشد، $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ واگراست.

مثال ۳۴.۵.۶. مساحت ناحیه S را که زیر $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$، بالای محور x و بین $x = 0$ و $x = 1$ قرار دارد بیابید.

مثال ۳۵.۵.۶. مقدار انتگرال‌های ناسره زیر را حساب کنید.

$$\text{(i)} \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|1 - x^2|}}, \quad \text{(ii)} \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad \text{(iii)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\mathrm{d}x$$

آزمون همگرایی انتگرال‌های ناسره

در ادامه این بخش، قضایایی برای بیان رفتار انتگرال‌های ناسره نوع اول و دوم بیان می‌کنیم. وقتی به سبب نداشتن تابع اولیه نتوانیم یک انتگرال ناسره را با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه کنیم، ممکن است با مقایسه آن با انتگرال‌های ساده‌تر بتوانیم همگرایی یا واگرایی آن را تعیین کنیم. از این‌رو، در برآورد همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره قضیه زیر نقشی محوری دارد.

قضیه ۱.۵.۶ **(آزمون مقایسه).**

(الف) فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای هر $a \le c$ ($c \le b$) در بازه $[a,c]$ ($[c,b]$) انتگرال‌پذیر باشند و $\forall x \in [a,+\infty),\ 0 \le f(x) \le g(x)$ ($\forall x \in [-\infty,b]$). اگر $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^{b} g(x)\mathrm{d}x$) همگرا باشد آن‌گاه $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$) همگراست و اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$) واگرا باشد آن‌گاه $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^{b} g(x)\mathrm{d}x$) واگراست.

(ب) فرض کنید تابع f در نقطه a (یا نقطه b) کراندار نباشد و به ازای هر $c \in (a,b]$ ($c \in [a,b)$)، f در بازه $[c,b]$ ($[a,c]$) انتگرال‌پذیر باشد و $\forall x \in [a,b],\ 0 \le f(x) \le g(x)$. در این صورت، اگر $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ همگرا باشد آن‌گاه $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ همگراست و اگر $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ واگرا باشد آن‌گاه $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ واگراست.

مثال ۳۶.۵.۶. نشان دهید انتگرال ناسره $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ همگراست. سپس کرانی برای آن بدست آورید.

به ازای مقادیر بزرگ یا کوچک x، بسیاری از انتگرال‌ها رفتاری مشابه با توان‌های x دارند. اگر این وضع روی دهد می‌توان آن‌ها را با P-انتگرال‌ها که در قضیه زیر بیان می‌شود، مقایسه کرد.

قضیه ۲.۵.۶ **(p-انتگرال‌ها).** اگر $0 < a < \infty$ آن‌گاه

(الف) انتگرال $\int_a^{\infty} x^{-p}\mathrm{d}x$ به ازای $p>1$ همگرا به $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$ و به ازای $p\leq 1$ واگرا به ∞ است.

(ب) انتگرال $\int_0^{a} x^{-p}\mathrm{d}x$ به ازای $p<1$ همگرا به $\dfrac{a^{1-p}}{1-p}$ و به ازای $p\geq 1$ واگرا به ∞ است.

برهان. (ب) اگر $p<1$ آن‌گاه داریم

$$\int_0^a x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{c\to 0^+}\int_c^a x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{c\to 0^+}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_c^a=\lim_{c\to 0^+}\frac{1}{1-p}(a^{1-p}-c^{1-p})=\frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

همچنین اگر $p>1$ آن‌گاه داریم

$$\int_0^a x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{c\to 0^+}\int_c^a x^{-p}\mathrm{d}x=\lim_{c\to 0^+}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_c^a=\lim_{c\to 0^+}\frac{c^{1-p}-a^{1-p}}{p-1}=\infty.$$

علاوه براین به ازای $p=1$ داریم

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{c\to 0^+}\ln x\Big|_c^a=+\infty.$$

مثال ۳۷.۵.۶. همگرایی یا واگرایی انتگرال $\int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{x^p}\mathrm{d}x$ را بررسی کنید.

قضیه ۳.۵.۶ **(آزمون مقایسه حدی).**

(الف) فرض کنید به ازای هر $c\in[a,+\infty)$ ($c\in(-\infty,b]$) توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر $[a,c]$ ($[c,b]$) نامنفی و انتگرال‌پذیر باشند و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$). اگر $0<l<+\infty$ آن‌گاه انتگرال‌های $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ و $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ و $\int_{-\infty}^b g(x)\mathrm{d}x$) هم‌رفتارند. اگر $l=0$ آن‌گاه همگرایی $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^b g(x)\mathrm{d}x$)

همگرایی $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$) را نتیجه می‌دهد و اگر $l = \infty$ آن‌گاه واگرایی $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^b g(x)\mathrm{d}x$) واگرایی $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ ($\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$) را نتیجه می‌دهد.

(ب) فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ در نقطه a (یا در نقطه b) کراندار نباشند و به ازای هر $c \in (a, b]$ ($c \in [a, b)$) این توابع در $[c, b]$ ($[a, c]$) نامنفی و انتگرال‌پذیر باشند و $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ ($\lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$). در این صورت، اگر $\circ < l < +\infty$ آن‌گاه انتگرال‌های $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ و $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ هم‌رفتارند. اگر $l = \circ$ آن‌گاه همگرایی $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ همگرایی $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ را نتیجه می‌دهد و اگر $l = +\infty$ آن‌گاه واگرایی $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ واگرایی $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ را نتیجه می‌دهد.

مثال ۳۸.۵.۶. همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \int_{۱}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{۳x^{۲} + \sqrt{۳}x + ۱}, \quad \text{(ii)}\ \int_{\circ}^{\pi^{۲}} \frac{\mathrm{d}x}{۱ - \cos\sqrt{x}}.$$

نکته. در قضیه قبل، اگر $l = ۰$ آن‌گاه از واگرایی $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ نمی‌توان واگرایی یا همگرایی $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ را نتیجه گرفت. به همین ترتیب، اگر $l = +\infty$ آن‌گاه از همگرایی $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ نمی‌توان همگرایی یا واگرایی $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ را نتیجه گرفت. به عنوان مثال، اگر $f(x) = e^{-x}$، $g(x) = e^{x}$ و $h(x) = x$ آن‌گاه

$$\int_{۰}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} e^{x}\mathrm{d}x = \infty,$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰ = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{g(x)},$$

درحالی که $\int_{۰}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = ۱$ و $\int_{۰}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} x\mathrm{d}x = \infty$.
در حالت دوم، اگر $f(x) = e^{-x}$، $g(x) = e^{-۲x}$ و $h(x) = e^{x}$ آن‌گاه

$$\int_{۰}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} e^{-۲x}\mathrm{d}x = \frac{۱}{۲},$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \infty,$$

درحالی که $\int_{۰}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = ۱$ و $\int_{۰}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_{۰}^{+\infty} e^{x}\mathrm{d}x = \infty$.

تابع گاما

تابع گاما با انتگرال ناسره $\Gamma(x) = \displaystyle\int_{۰}^{\infty} t^{x-۱}e^{-t}\mathrm{d}t$ تعریف می‌شود. انتگرال فوق به ازای $x > ۰$ همگراست.

$$\Gamma(x) = \int_{۰}^{۱} t^{x-۱}e^{-t}\mathrm{d}t + \int_{۱}^{\infty} t^{x-۱}e^{-t}\mathrm{d}t = \mathcal{I}_۱ + \mathcal{I}_۲$$

فرض کنید $x \geq ۱$. در این صورت، $t^{x-۱}e^{-t}$ در بازه $[۰,۱]$ پیوسته و در نتیجه $\mathcal{I}_۱$ همگراست. حال فرض کنید $۰ < x < ۱$. در این صورت $\mathcal{I}_۱$ در $t = ۰$ یک انتگرال ناسره نوع دوم است. از $\lim\limits_{t\to۰^+} t^{۱-x}t^{x-۱}e^{-t} = ۱$ و آزمون مقایسه حدی همگرایی $\mathcal{I}_۱$ نتیجه می‌شود.
فرض کنید $x > ۰$. در این صورت $\mathcal{I}_۲$ یک انتگرال ناسره نوع اول است. با توجه به اینکه

$\lim\limits_{t\to 0^+} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$، بنا بر آزمون مقایسه حدی انتگرال $\mathcal{I}_2$ همگراست.

مثال ۳۹.۵.۶.

(الف) با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء نشان دهید به ازای هر $x > 0$ داریم

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

(ب) به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ نشان دهید

$$\Gamma(n+1) = n!; \quad \text{گسترش تابع فاکتوریل به اعداد حقیقی مثبت}$$

(پ) با فرض $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$، نشان دهید

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

مثال ۴۰.۵.۶. مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty} x^6 e^{-2x}\mathrm{d}x$ را بیابید.

۶.۶ مسایل

۱. حدود زیر را محاسبه کنید

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{۳}{۲}}(۱+\sqrt{۲}+\ldots+\sqrt{n}),$$
$$\text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{۱}\frac{nf(x)}{۱+n^{۲}x^{۲}}\mathrm{d}x,\quad f\in C[۰,۱],$$
$$\text{(iii)}\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}\int_{۰}^{x}(t-x)\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t,$$
$$\text{(iv)}\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{۱}{n}\left(\frac{n}{n+۱}+\frac{n}{n+۲}+\ldots+\frac{n}{۲n}\right),$$

۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید

$$\text{(i)}\ \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^m x}{\sin^m x+\cos^m x}\mathrm{d}x,\quad m\in\mathbb{R},\qquad \text{(ii)}\ \int_{۰}^{۲}\sqrt{۴-x^{۲}}\,sign(x-۱)\mathrm{d}x,$$
$$\text{(iii)}\ \int_{۰}^{n}\lfloor t\rfloor^{۲}\mathrm{d}t,\qquad \text{(iv)}\ \int\frac{x^{۲}+۲}{۴x^{۵}+۴x^{۳}+x}\mathrm{d}x,$$
$$\text{(v)}\ \int\frac{e^x}{(۱+e^{۲x})^{۲}}\mathrm{d}x,\qquad \text{(vi)}\ \int\frac{x+۳}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۲}}\mathrm{d}x,$$
$$\text{(vii)}\ \int\frac{\ln x}{\sqrt{۱-x}}\mathrm{d}x,\qquad \text{(viii)}\ \int\frac{xe^x}{(x+۱)^{۲}}\mathrm{d}x,$$
$$\text{(ix)}\ \int\frac{\sqrt{x}}{۱+\sqrt[۴]{x^{۳}}}\mathrm{d}x,\qquad \text{(x)}\ \int_{e}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{۳}}$$

۳. آیا تابع $F(x)=\int_{۰}^{۲x-x^{۲}}\cos\left(\frac{۱}{۱+t^{۲}}\right)\mathrm{d}t$ دارای ماکزیمم و مینیمم است؟ جواب خود را توجیه کنید.

۴. فرض کنید تابع f پیوسته و همه جا ناصفر باشد و

$$[f(x)]^{۲}=\int_{۰}^{x}f(t)\frac{\sin t}{۲+\cos t}\mathrm{d}t$$

ضابطه تابع f را تعیین کنید.

۵. مساحت داخل دایره $r = ۳\sin\theta$ و خارج منحنی $r = ۲ - \sin\theta$ را بیابید.

۶. حجم بیضی‌وار حاصل از دوران بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ حول محور xها را بیابید.

۷. تابع $f(x)$ را طوری بیابید که طول قوس آن در بازه $[۰, x]$ برابر $۲x + f(x)$ باشد.

۸. فرض کنید $\mathcal{F}(s) = \int_{۰}^{\infty} \sin(at)e^{-st}\mathrm{d}t$، ($a \neq ۰$)

(الف) به ازای چه مقادیری از s انتگرال فوق همگراست.

(ب) به ازای $s > ۰$ مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

۹. تابع با ضابطه $y = x\sqrt{a^۲ - x^۲},\quad ۰ \leq x \leq a$ مفروض است. a را طوری بیابید که نسبت حجم حاصل از دوران سطح زیر منحنی حول محور xها به مساحت سطح زیر منحنی برابر $\frac{۸\pi}{۵}$ باشد.

۱۰. انتگرال $\int_{۱}^{\infty} \left(\frac{cx}{۲x^۲ + ۱} - \frac{۱}{x + ۱}\right) \mathrm{d}x$ به ازای یک مقدار حقیقی c همگراست. c را تعیین و مقدار انتگرال را محاسبه کنید.

فصل ۷

سری

۱.۷ مقدمه

هر سری نامتناهی، مجموعی است که حاوی بی‌نهایت جمله است. چون عمل جمع هر بار بین دو عدد انجام می‌گیرد، محاسبه مجموع سری‌های نامتناهی لزوماً نیازمند محاسبه حد است. توابع پیچیده $f(x)$ را اغلب می‌توان با سری‌های متشکل از توابع ساده‌تر بیان کرد. به عنوان مثال، بسیاری از توابع متعالی را می‌توان به صورت سری‌هایی بر حسب توان‌هایی از x بیان کرد. از این‌رو، این توابع شبیه چندجمله‌ای‌هایی با درجه بی‌نهایت هستند. از این نوع سری‌ها می‌توان جمله به جمله مشتق و انتگرال گرفت. همچنین، این سری‌ها نقش مهمی در حساب دیفرانسیل و انتگرال ایفا می‌کنند.

تعریف ۱.۱.۷. دنباله $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. به ازای هر n، s_n را به صورت

$$s_n = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = \sum_{i=۱}^{n} a_i$$

تعریف کنید. دنباله $\{s_n\}$ را یک سری نامتناهی یا به‌طور خلاصه سری می‌نامند و با نماد $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} a_n$ $(\sum a_n)$ نشان می‌دهند. s_n را مجموع جزئی nام سری و a_n را جمله عمومی سری

می‌نامند. به عنوان مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$$

گاهی لازم یا سودمند است که مجموع را با اندیس دیگری غیر از یک شروع کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n=1+a+a^2+\dots,$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\dots$$

تعریف ۲.۱.۷. می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ به مجموع s همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s$ هرگاه $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ که در آن s_n مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ است. اگر $\lim_{n\to\infty}s_n$ موجود نباشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را واگرا گویند. لازم به ذکر است مجموع یک سری همگرا حد دنباله مجموع‌های جزئی است و با عمل جمع معمولی بدست نمی‌آید.

نکته. همگرایی سری $\sum_{n=1}^{n}$ به همگرایی دنباله $\{s_n\}$ بستگی دارد و وابستگی کمی به همگرایی دنباله $\{a_n\}$ دارد.

سری هندسی

هر سری به صورت $\sum_{1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\dots$ که جمله nام آن $a_n=ar^{n-1}$ است را یک سری هندسی می‌نامیم. عدد a، جمله اول سری است. عدد r نیز قدرنسبت (نسبت مشترک) سری نامیده می‌شود. درواقع، به ازای هر $n\geq 1$، این نسبت برابر است با مقدار

نسبت جمله $n+۱$ام به جمله nام، یعنی،

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{ar^n}{ar^{n-۱}}=r,\quad n=۱,۲,\ldots$$

محموع جزئی nام سری هندسی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}s_n&=a+ar+ar^۲+\ldots+ar^{n-۱}\\ rs_n&=ar+ar^۲+ar^۳+\ldots+ar^n\\ &-----------------\\ (۱-r)s_n&=a-ar^n\end{aligned}$$

لذا $r\neq ۱,\quad s_n=a\frac{۱-r^n}{۱-r}$. در حالتی که $r=۱$ داریم $s_n=na$.
اگر $a=۰$ آن‌گاه به ازای هر n داریم $s_n=۰$. ازاین‌رو $\lim_{n\to\infty}s_n=۰$. حال فرض کنید $a\neq ۰$. در این صورت، اگر $|r|<۱$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}r^n=۰$. لذا $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{۱-r}$. اگر $r>۱$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ و درنتیجه $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$ هرگاه $a>۰$ و $\lim_{n\to\infty}s_n=-\infty$ هرگاه $a<۰$. همین حکم فوق برای $r=۱$ نیز برقرار است، زیرا در این حالت داریم $s_n=na$. اگر $r\leq -۱$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}r^n$ وجود ندارد و درنتیجه $\lim_{n\to\infty}s_n$ نیز وجود ندارد.

مثال ۱.۱.۷.

$$\begin{aligned}&\sum_{۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲,\\ &\sum_{۱}^{\infty}\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{n-۱}=\pi-e+\frac{e^۲}{\pi}+\frac{e^۳}{\pi^۲}+\ldots=\frac{\pi^۲}{\pi+e},\\ &\sum_{۱}^{\infty}(\sqrt{۲})^{n-۱}\ \text{سری به } \infty \text{ واگراست},\\ &\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\ \text{سری واگراست},\\ &\sum_{۱}^{\infty}\frac{۳۲}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)^{n-۱}=\frac{۳۲}{۹۹}.\end{aligned}$$

مثال ۲.۱.۷. اگر بانکی یک‌بار در سال بهره ساده ۱۰ درصدی به حساب معینی بپردازد،

موجودی این حساب در پایان هشتمین سال چقدر می‌شود مشروط بر اینکه در شروع هر سال از این هشت سال، ۱۰۰۰ دلار به حساب یاد شده واریز شود؟ (فرض کنید این حساب در آغاز موجودی نداشته باشد)

سری‌های ادغامی و سری همساز

مثال ۳.۱.۷. نشان دهید سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$$

همگراست و مجموع آن‌را بیابید.

جواب. چون $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$، می‌توان مجموع جزئی s_n را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ و سری مفروض به ۱ همگراست:

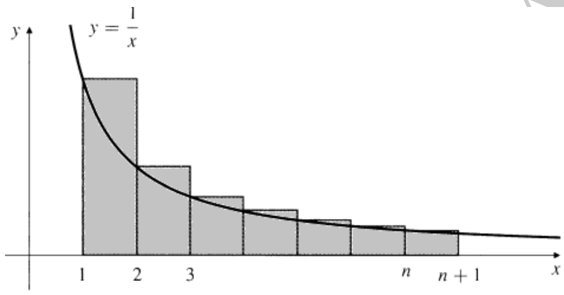
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

سری‌هایی به شکل بالا را سری ادغامی (تلسکوپی) می‌نامند. علت این نامگذاری آن است که وقتی جمله‌های مجموع جزئی را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم بسیاری از جملات دو به دو حذف می‌شوند و مجموع جزئی شکل ساده‌ای خواهد گرفت.

مثال ۴.۱.۷. نشان دهید سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ به ∞ واگراست.

جواب. اگر s_n مجموع جزئی nام سری همساز باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned} s_n &= ۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n} \\ &= \text{مجموع مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌دار در شکل ۱.۷} \\ &> (\text{مساحت زیر } y = \tfrac{۱}{x} \text{ از } x = ۱ \text{ تا } x = n + ۱) \\ &= \int_{۱}^{n+۱} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n + ۱), \end{aligned}$$



شکل ۱.۷

چون $\lim_{n\to\infty} \ln(n + ۱) = \infty$، پس $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \ldots$$

به ∞ واگراست.

چند قضیه در مورد سری‌ها

قضیه ۱.۱.۷ **.** اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

برهان. با توجه به همگرایی سری می‌توان نوشت $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-۱} = s$. فرض کنید $a_n = s_n - s_{n-۱}$. در این صورت داریم $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$. □

عکس قضیه فوق برقرار نیست.

تبصره (آزمون واگرایی)**.** اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n+1}.$$

***قضیه* ۲.۱.۷.** سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر عدد صحیح مانند $N \geq 1$، سری $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

با توجه به قضیه فوق، می‌توان گفت حذف چند جمله اول یا افزودن چند جمله به یک سری تأثیری در همگرایی یا واگرایی سری ندارد. به عنوان مثال، سری $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$ واگراست زیرا $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+4} = \sum_{5}^{\infty} \frac{1}{n}$.

***قضیه* ۳.۱.۷.** اگر $\sum_{1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{1}^{\infty} b_n$ به‌ترتیب همگرا به A و B باشند آن‌گاه

(الف) سری $\sum_{1}^{\infty} ca_n$ که در آن c یک ثابت است همگرا به cA است؛

(ب) سری $\sum_{1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ به $A \pm B$ همگراست؛

(پ) اگر به ازای $n = 1, 2, \ldots$ داشته باشیم $a_n \leq b_n$ آن‌گاه $A \leq B$.

با توجه به قضیه قبل، اگر $\sum_{1}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آن‌گاه $\sum_{1}^{\infty} (a_n + b_n)$ واگراست.

ممکن است سری‌های $\sum_{1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{1}^{\infty} b_n$ واگرا باشند ولی سری $\sum_{1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ همگرا یا واگرا باشد.

قضیه **۴.۱.۷.** اگر $\{a_n\}$ یک دنباله نامنفی باشد آن‌گاه $\sum_{1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر دنباله مجموع‌های جزئی آن یعنی $\{s_n\}$ از بالا کراندار باشد.

مثال ۵.۱.۷. سری $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ را در نظر بگیرید. مجموع جزئی آن به شکل زیر است

$$s_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2,$$

بنابراین از قضیه قبل نتیجه می‌شود سری فوق همگراست.

۲.۷ آزمون‌های همگرایی برای سری‌های مثبت

در بخش قبل چند مثال درباره سری‌های همگرا (سری‌های هندسی و ادغامی) ارائه شد که مجموع آن‌ها را دقیقاً به این سبب توانستیم تعیین کنیم که موفق شدیم مجموع‌های جزئی s_n را به صورت فشرده با توابع صریحی بر حسب n بیان و حد آن را وقتی $n \to \infty$ بدست آوریم. به‌طور معمول انجام این کار برای هر سری دلخواه امکان‌پذیر نیست و بنابراین، تعیین مجموع دقیق سری مفروض معمولاً امکان‌پذیر نخواهد بود. در این بخش آزمون‌هایی را برای تعیین همگرایی یا واگرایی سری‌ها بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۷. سری $\sum_{1}^{\infty} a_n$ را مثبت گویند هرگاه $\forall n, a_n \geq 0$.

آزمون انتگرال

آزمون انتگرال، با مقایسه یک سری مثبت و یک انتگرال ناسره که دارای رفتار مشابهی با این سری است، وسیله‌ای را برای تعیین همگرایی سری‌های مثبت بدست می‌دهد. روش فوق را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه **۱.۲.۷** (آزمون انتگرال)**.** فرض کنید f تابعی پیوسته، مثبت و نزولی بر $[N, +\infty)$ باشد به‌طوری که $\forall n \geq N,\ a_n = f(n)$. در این صورت $\sum_{N}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_{N}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ همگرا باشد.

مثال ۱.۲.۷. نشان دهید سری‌های $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ و $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگرا هستند.

آزمون‌های مقایسه

آزمون‌هایی زیر بر اساس مقایسه با سری دیگری که همگرایی یا واگرایی آن‌را می‌شناسیم این امکان را فراهم می‌کند تا همگرایی یا واگرایی سری مفروض را تعیین کنیم.

***قضیه* ۲.۲.۷** (آزمون مقایسه)**.** فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی با شرط $0 \leq a_n \leq b_n$ باشند در این صورت

(الف) اگر سری $\sum_{1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آن‌گاه سری $\sum_{1}^{\infty} a_n$ نیز همگراست؛

(ب) اگر سری $\sum_{1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آن‌گاه سری $\sum_{1}^{\infty} b_n$ نیز واگراست.

مثال ۲.۲.۷. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{1}^{\infty} \left|\sin \frac{1}{n^2}\right|, \quad \text{(iii)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}, \quad \text{(iv)}\ \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

قضیه ۳.۲.۷ (آزمون مقایسه حدی)**.** فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله مثبت باشند و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ که در آن l یک عدد نامنفی متناهی است یا $+\infty$. در این صورت

(الف) اگر $l = ۰$ و سری $\sum_{۱}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آن‌گاه سری $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ همگراست؛

(ب) اگر $۰ < l < \infty$ آن‌گاه سری‌های $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ و $\sum_{۱}^{\infty} b_n$ هم‌رفتارند؛

(پ) اگر $l = \infty$ و سری $\sum_{۱}^{\infty} b_n$ واگرا باشد آن‌گاه سری $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال ۳.۲.۷. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+\sqrt{n}}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{۱}^{\infty} \frac{n+۵}{n^{۳}-۲n+۳}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{۱}^{\infty} \frac{۲^n+۱}{۳^n+۱}$$

آزمون‌های نسبت و ریشه

قضیه ۴.۲.۷ (آزمون نسبت)**.** فرض کنید $a_n > ۰$ و $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ وجود داشته باشد. در این صورت

(الف) اگر $۰ \leq l < ۱$ آن‌گاه $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ همگراست؛

(ب) اگر $۱ < l \leq \infty$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ و سری $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ به بی‌نهایت واگراست؛

(پ) اگر $l = ۱$، این آزمون هیچ اطلاعی از همگرایی یا واگرایی سری بدست نمی‌دهد.

مثال ۴.۲.۷. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)} \ \sum_{۱}^{\infty} \frac{n^{۵}}{۲^n}, \quad \text{(ii)} \ \sum_{۱}^{\infty} \frac{۹۹^n}{n!}, \quad \text{(iii)} \ \sum_{۱}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

قضیه ۵.۲.۷ (آزمون ریشه)**.** فرض کنید $a_n > ۰$ و $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. در این صورت

(الف) اگر $۰ \leq l < ۱$ آن‌گاه $\sum\limits_{۱}^{\infty} a_n$ همگراست؛

(ب) اگر $۱ < l \leq \infty$ آن‌گاه $\sum\limits_{۱}^{\infty} a_n$ واگراست؛

(پ) اگر $l = ۱$، این آزمون هیچ اطلاعی از همگرایی یا واگرایی سری بدست نمی‌دهد.

مثال ۵.۲.۷. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)} \ \sum_{۱}^{\infty} \frac{۵^n}{n^n}, \quad \text{(ii)} \ \sum_{۱}^{\infty} \frac{۳^n}{n^{۳}}$$

قضیه **۶.۲.۷.** اگر $\{a_n\}$ یک دنباله نامنفی باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

عکس قضیه فوق برقرار نیست. به عنوان مثال، فرض کنید $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$. در این صورت

$$\frac{2}{2^{n+1}} \le a_n \le \frac{4}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sqrt[n]{a_n} \le \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \to \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2},$$

درحالی که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^{n+1}}{2(3+(-1)^n)}.$$

همگرای مطلق و مشروط

تمامی سری‌هایی که تا اینجا در نظر گرفته شدند سری‌هایی مثبت بودند. حال محدودیت فوق را حذف کرده و جمله‌های a_n را دلخواه در نظر می‌گیریم. همیشه می‌توان با در نظر گرفتن قدرمطلق هر جمله به‌جای خود جمله، یک سری با جملات مثبت از سری مفروض بدست آورد.

تعریف ۲.۲.۷. سری $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق می‌نامند هرگاه سری $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. همچنین اگر سری $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی همگرای مطلق نباشد آن‌را همگرای مشروط می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۷. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نامنفی باشد. در این صورت سری $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n a_n$ را سری متناوب می‌نامند.

سری $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگرای مطلق است اما سری $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرای مشروط است.

سری $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$ نیز نه همگرای مطلق و نه همگرای مشروط است.

قضیه **۷.۲.۷.**

(الف) هر سری همگرای مطلق همگراست.

(ب) سری $\sum_{1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است اگر و فقط اگر هر یک از سری‌های تشکیل شده از جملات مثبت و منفی همگرا باشند.

نکته. آزمون‌های مقایسه، مقایسه حدی، نسبت، ریشه و انتگرال را می‌توان برای بررسی همگرایی مطلق سری $\sum_{1}^{\infty} a_n$ به‌کار برد.

مثال ۶.۲.۷. همگرایی مطلق سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$$

***قضیه* ۸.۲.۷ (آزمون سری‌های متناوب).** فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ نامنفی، نزولی و همگرا به صفر باشد. در این صورت، سری متناوب $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n a_n$ همگراست.

مثال ۷.۲.۷. همگرایی مطلق و مشروط سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$$

مثال ۸.۲.۷. به ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ همگرای مطلق، مشروط یا واگراست.

مثال ۹.۲.۷. همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{10}^{\infty} \frac{\sin(n+1/2)\pi}{\ln\ln n}$$

۳.۷ سری توانی

هر سری به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

را یک سری توانی بر حسب توان‌های $x-c$ یا یک سری توانی حول نقطه $x=c$ می‌نامیم. ثابت‌های a_0، a_1، ... را ضرایب سری توانی می‌نامیم.

با توجه به اینکه جمله‌های هر سری توانی توابعی از متغیر x هستند، به ازای هر مقدار x، سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد. به ازای آن مقادیر از x که سری همگراست، مجموع سری تابعی از x را نتیجه می‌دهد. به عنوان مثال، اگر $|x|<1$ آن‌گاه

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

سری هندسی طرف چپ، نمایش تابع $\frac{1}{1-x}$ با یک سری توانی بر حسب x (یا حول نقطه $x=0$) است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با وجود اینکه $\frac{1}{1-x}$ به ازای همه xهای حقیقی جز $x=1$ تعریف شده اما این نمایش فقط بر بازه $(-1,1)$ معتبر است. این سری به ازای $x=-1$ و $|x|>1$ واگراست.

معمولاً سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ را بسط داده شده حول نقطه $x=c$ (مرکز همگرایی سری توانی) می‌نامند. با جایگزینی $u=x-c$ سری به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ خواهد شد که یک سری توانی بر حسب u حول نقطه $u=0$ است.

قضیه ۱.۳.۷.

(الف) هرگاه سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x=c\neq 0$ همگرا باشد آن‌گاه به ازای هر x با شرط $|x|<|c|$ همگرای مطلق است.

(ب) اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x=d$ واگرا باشد آن‌گاه به ازای هر x با شرط $|x|>|d|$ واگراست.

قضیه ۲.۳.۷. برای هر سری توانی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ یکی از سه وضعیت زیر برقرار است

(الف) سری فقط در $x=c$ همگراست.

(ب) سری به ازای هر عدد حقیقی x همگراست.

(پ) عدد حقیقی مثبتی مانند R وجود دارد به‌طوری‌که سری توانی به ازای xهایی که در $|x-c|<R$ صدق می‌کنند همگرا و به ازای xهایی که در $|x-c|>R$ صدق می‌کنند واگراست. در این حالت، سری ممکن است در یک یا هر دو نقطه انتهایی $x=c-R$ و $x=c+R$ همگرا باشد.

در هر یک از این سه حالت، همگرایی همواره مطلق است (البته در حالت (پ)، بجز شاید در نقاط انتهایی)

عدد R در حالت (پ) قضیه قبل را شعاع همگرایی سری توانی می‌نامیم. در حالت (الف)، شعاع همگرایی صفر و در حالت (ب) شعاع همگرایی بی‌نهایت است.

شعاع همگرایی را اغلب می‌توان با استفاده از آزمون نسبت برای سری‌های هندسی بدست آورد. اگر

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-c|$$

وجود داشته باشد آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ به ازای $\rho<1$ یعنی به ازای

$$|x-c|<R,\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}},$$

همگرای مطلق و به ازای $|x-c|>R$ واگراست.

مثال ۱.۳.۷. شعاع و بازه همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n},\quad \text{(ii)}\ \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n},\quad \text{(iii)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n},$$

$$\text{(iv)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \text{(v)}\ \sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$$

اعمال جبری بر سری‌های توانی

برای ساده کردن بحث فقط آن دسته از سری‌های توانی را در نظر می‌گیریم که دارای مرکز همگرایی $x = 0$ هستند.

***قضیه* ۳.۳.۷.** فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دو سری توانی به‌ترتیب با شعاع‌های همگرایی R_a و R_b باشند و c یک ثابت باشد. در این صورت

(الف) سری $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n$ دارای شعاع همگرایی R_a است و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) x^n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

(ب) سری $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ دارای شعاع همگرایی R است که در آن $R = \min\{R_a, R_b\}$ و

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

با توجه به قضیه فوق، ملاحظه می‌شود که می‌توان سری‌های توانی هم مرکز را بر هر بازه‌ای که بین بازه‌های همگرایی آن‌ها مشترک باشد با هم جمع یا از هم کم کرد.

حاصل‌ضرب کوشی

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ دو سری توانی باشند. در این صورت، حاصل‌ضرب این دو سری یک سری توانی است که به صورت زیر بدست می‌آید

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

که در آن

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i},$$

سری $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ را حاصل‌ضرب کوشی دو سری می‌نامند که شعاع همگرایی آن حداقل برابر مینیمم شعاع همگرایی دو سری اولیه است.

مثال ۲.۳.۷. با استفاده از بسط سری توانی تابع $\frac{1}{1-x}$ حول نقطه صفر و حاصل‌ضرب کوشی، بسط سری توانی $\frac{1}{(1-x)^2}$ را حول $x=0$ بیابید.

مثال ۳.۳.۷. حاصل‌ضرب کوشی دو سری $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ را بیابید.

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری توانی

اگر یک سری توانی دارای شعاع همگرایی مثبت باشد، می‌توان از آن جمله به جمله مشتق یا انتگرال گرفت. سری حاصل در هر نقطه از بازه همگرایی بجز شاید در نقاط انتهایی، به مشتق یا انتگرال مجموع سری اولیه همگراست. درواقع، این حقیقت بسیار مهم بیان می‌کند که در محاسبات، رفتار سری‌های توانی مشابه چندجمله‌ای‌هاست که آسان‌ترین توابع برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری هستند.

قضیه ۴.۳.۷. فرض کنید سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر بازه $(-R, R)$ که در آن $R > 0$، به مجموع $f(x)$ همگرا باشد، یعنی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (-R < x < R).$$

در این صورت

(الف) $f(x)$ بر $(-R, R)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x)$ با مشتق‌گیری از جملات سری توانی $f(x)$ حاصل می‌شود، یعنی،

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

(ب) f در هر زیربازه $(-R, R)$ انتگرال‌پذیر است و اگر $|x| < R$، انتگرال آن با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری بدست می‌آید، یعنی،

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots$$

قضیه ۵.۳.۷ (قضیه آبل)**.** مجموع هر سری توانی، در هر نقطه بازه همگرایی خود، تابعی پیوسته است. در حالت خاص، اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ به ازای عددی مانند $R > 0$ همگرا باشد آن‌گاه

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$$

و اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ همگرا باشد آن‌گاه

$$\lim_{x\to -R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n.$$

مثال ۴.۳.۷. بسط سری توانی توابع $\ln(x+1)$ و $\tan^{-1} x$ را بیابید.

مثال ۵.۳.۷. با محاسبه مجموع سری

$$\sum_{1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \dots,$$

مقدار سری $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ را بیابید.

مثال ۶.۳.۷. سری توانی تابع $\frac{1}{2+x}$ را بر حسب توان‌های $x-1$ بیابید.

۴.۷ سری‌های تیلور و مک لورن

اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ دارای شعاع همگرایی مثبت R باشد آن‌گاه مجموع این سری تابعی مانند $f(x)$ بر بازه $(c-R, c+R)$ است. در این حالت می‌گوییم سری توانی مفروض، نمایش $f(x)$ بر این بازه است. رابطه بین $f(x)$ و ضرایب این سری توانی در قضیه زیر بیان می‌شود.

***قضیه* ۱.۴.۷.** فرض کنید سری

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

بر $c-R < x < c+R$ که در آن $R > 0$، به $f(x)$ همگرا باشد. در این صورت، به ازای $k = 0, 1, 2, \dots$ داریم

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

تعریف ۱.۴.۷. اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی از c بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد، سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ را سری تیلور f حول $x = c$ (یا سری تیلور بر حسب توان‌های $x-c$) می‌نامند. اگر $c = 0$، معمولاً به جای سری تیلور، واژه سری مک لورن به‌کار می‌رود.

***قضیه* ۲.۴.۷** (قضیه تیلور)**.** فرض کنید $f \in C^{n+1}[a,b]$. در این صورت، به ازای هر $x \in [a,b]$ عددی مانند ξ_x بین x و c وجود دارد به‌طوری که

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

که در آن

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,$$

و

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

$P_n(x)$ را چندجمله‌ای تیلور درجه nام حول نقطه c و $R_n(x)$ را جمله باقی‌مانده می‌نامند.

نکته. جمله باقی‌مانده را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد

$$R_n(x) = \frac{۱}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+۱)}(t)\mathrm{d}t$$

نکته. سری تیلور لزوماً به ازای هر x همگرا نیست. اما با توجه به قضیه تیلور اگر $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = ۰$ آن‌گاه سری تیلور f همگرا به $f(x)$ است، یعنی،

$$f(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

زیرا بنا به قضیه تیلور داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_n(x)) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) \\ &= \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k. \end{aligned}$$

توابع تحلیلی

تابع $f(x)$ را در $x = c$ تحلیلی گویند هرگاه $f(x)$ برابر مجموع یک سری توانی بر حسب توان‌های $x - c$ با شعاع همگرایی مثبت باشد. اگر f در هر نقطه بازه بازی مانند I تحلیلی باشد آن‌گاه بر کل بازه I نیز تحلیلی است.

بیشتر توابع مقدماتی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آن‌ها مواجه می‌شویم هرجا که دارای مشتقات تا همه مرتبه‌ها باشند تحلیلی نیز هستند. از طرف دیگر وقتی سری توانی بر حسب توان‌های $x - c$ بر بازه بازی حاوی c همگرا باشد، مجموع آن در c تحلیلی است و سری مفروض عبارت است از سری تیلور این مجموع حول $x = c$.

مثال ۱.۴.۷. سری تیلور تابع e^x را حول $x = c$ بیابید. این سری در چه بازه‌ای به e^x همگرا و در چه بازه‌ای تحلیلی است؟ سری مک لورن e^x را بیابید.

جواب. با توجه به اینکه تمامی مشتقات $f(x) = e^x$ برابر e^x هستند، به ازای هر عدد صحیح $n \geq ۰$ داریم $f^{(n)}(c) = e^c$. لذا سری تیلور e^x حول $x = c$ عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n = e^c + e^c(x-c) + \frac{e^c}{۲!}(x-c)^۲ + \dots$$

همچنین

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+۱)!} = ۰ \Rightarrow R = \infty$$

لذا سری به ازای تمامی xها همگراست.

از طرفی داریم

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\xi_x}}{(n+۱)!} = ۰$$

بنابراین

$$e^x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{e^c}{n!}(x-c)^n$$

سری مک لورن e^x عبارت است از

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \dots$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$\sin x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n+۱)!} x^{۲n+۱} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{(۲n)!} x^{۲n} = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \frac{x^۶}{۶!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(۱+x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} x^n = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \dots, \quad -۱ < x \leq ۱,$$

$$\tan^{-۱} x = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{۲n+۱} x^{۲n+۱} = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \dots, -۱ \leq x \leq ۱,$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۴!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

مثال ۲.۴.۷. سری مک لورن توابع زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\ e^{\frac{-x^{۲}}{۳}},\quad \text{(ii)}\ \frac{\sin(x^{۲})}{x},\quad \text{(iii)}\ \sin^{۲} x,\quad \text{(iv)}\ \ln\left(\frac{۱+x}{۱-x}\right)$$

مثال ۳.۴.۷. سری تیلور $\ln x$ را بر حسب توان‌های $x - ۲$ بیابید.

مثال ۴.۴.۷. سری تیلور $\cos x$ را حول نقطه $x = \frac{\pi}{۳}$ بیابید. نمایش $\cos x$ با این سری در کدام نقاط معتبر است.

مثال ۵.۴.۷. سه جمله اول غیر صفر سری مک لورن $\tan x$ و $\ln\cos x$ را بیابید.

سری دوجمله‌ای

طبق قضیه دوجمله‌ای برای چندجمله‌ای‌ها، می‌دانیم اگر n یک عدد طبیعی باشد آن‌گاه

$$(۱+x)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} x^k = ۱ + nx + \frac{n(n-۱)}{۲}x^۲ + \ldots + x^n$$

اما اگر n یک عدد طبیعی نباشد آن‌گاه معادله بالا با یک سری نامتناهی جایگزین می‌شود که سری دوجمله‌ای نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۴.۷. فرض کنید $f(x) = (۱+x)^r$ که در آن $r \in \mathbb{R}$. در این صورت، سری مک لورن تابع $f(x)$ در بازه $(-۱,۱)$ همگراست و

$$(۱+x)^r = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{r(r-۱)\ldots(r-n+۱)}{n!}x^n$$

سری دوجمله‌ای همواره به ازای $|x| < ۱$ همگراست ولی اگر $-۱ < r < ۰$، سری در $x = ۱$ همگرا و اگر $r \geq ۰$، سری در هر دو نقطه انتهایی $x = \pm ۱$ نیز همگراست.

مثال ۶.۴.۷. سری مک لورن تابع $sin^{-۱}x$ را بیابید.

۵.۷ مسایل

۱. همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

$$\text{(i)}\ \sum_{۱}^{\infty}\frac{n^{۳}}{n!},\quad \text{(ii)}\ \sum_{۱}^{\infty}\frac{۱+\sin n}{n^{۲}},\quad \text{(iii)}\ \sum_{۱}^{\infty}\frac{(۲n)!}{(n!)^{۲}},$$

$$\text{(iv)}\ \sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{n}{۲^{n}},\quad \text{(v)}\ \sum_{۱}^{\infty}a_n,\quad a_n=\begin{cases}\frac{۱}{n}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد}\\ \frac{-۱}{n^{۲}}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد}\end{cases}$$

۲. به ازای کدام مقادیر x، سری $\sum_{۱}^{\infty}(n+۱)^{۲}\left(\frac{x}{x+۲}\right)^{n}$ همگرای مطلق، مشروط یا واگراست.

۳. بسط سری توانی توابع $\frac{۱}{(۱-x)^{۳}}$ و $\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ حول نقطه صفر را بیابید.

۴. مجموع سری‌های زیر را بیابید.

$$\text{(i)}\ \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n^{۲}}{\pi^{n}},\quad \text{(ii)}\ \sum_{۲}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{\pi^{۲n-۴}}{(۲n-۱)!},\quad \text{(iii)}\ \sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}\frac{۲n+۱}{n(n+۱)}$$

۵. همگرایی مطلق یا مشروط سری $\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{n}\tan^{-۱}\frac{۱}{۲n+۱}$ را بررسی کنید.

۶.

(الف) بازه همگرایی سری $\sum_{۱}^{\infty}n^{۲}x^{n}$ را بدست آورید.

(ب) در درون بازه همگرایی، سری فوق با چه تابعی برابر است.

(پ) مقدار سری $\sum_{۱}^{\infty}(-۱)^{n}\frac{n^{۲}}{۳^{n}}$ را بیابید.

مراجع

[۱] شهشهانی، سیاوش: حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتشارات ، ۱۳۸۷

[2] Adams, R. A.: Calculus: A Complete Course, Sixth ed., Pearson Education Canada Inc., Toronto (2006).

[3] Apostol, T.: Calculus, Vo 1, second ed., Wiley, New York (1967).

[4] Maron , I. A.: Problems in Calculus of One Variable, MIR Publishers, Moscow (1973).

[5] Silverman, R. A.: Modern Calculus with Analytic Geometry, Dover Publications, (1969).

[6] Stewart , J.: Calculus: Concepts and Contexts, Seven ed. (2007).

[7] Thomas, G. B.: Calculus: Single Variable, Twelfth ed., Pearson Education Canada Inc. (2004).