معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی			
تعداد واحد/ساعت	**پیش نیاز/هم نیاز**	**از جدول**	**حل تمرین (ساعت)**
۳ واحد/ ۵۱ ساعت	معادلات دیفرانسیل و آنالیز ریاضی	۴	حداقل ۲۵

هدف درس:

آشنایی با انواع مختلف معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و چگونگی مدلسازی بسیاری از مسایل فیزیکی توسط معادلات دیفرانسیل، همچنین آشنایی با روشهای تحلیلی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.

سخنی با مدرس و دانشجو:

بدون شک کلیه علوم کابردی ارتباط نزدیک با معادلات دیفرانسیل به ویژه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارند. آشنایی دانشجویان با اینگونه معادلات و آشنایی با نحوه ی مدلسازی میتواند در درک بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی مفید واقع شود.

سرفصل درس:

آنالیز فوریه، معادلات دیفرانسیل جزیی، معادلات بیضوی، معادلات سهموی، معادلات هذلولوی.

ریز مواد:

آنالیز فوریه: سریها – انتگرالها – تبدیل فوریه.

معادلات دیفرانسیل جزیی: دسته بندی معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم خطی – مسائل با شرایط اولیه و مرزی.

معادلات بیضوی: مدلسازی – جواب اساسی – روش جداسازی متغیرها برای مسایل با شرایط مرزی – معادلات لاپلاس و پواسن – تابع گرین و مساله دیر سیکه.

معادلات سهموی: مدلسازی – روش جداسازی متغیرها برای مسایل با شرایط اولیه – مرزی – معادلات حرارت – اصل ماکسیمم وجود و یکتایی جواب.

معادلات هذلولوی: روش مشخصهها – قانون بقا در یک بعدی – معادله موج.

« به نام خدا »

جزوه درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

منابع

Linear partial differential equations, Tyn Myint-U, Lokenath Debnath (ch 4–7)

Partial differential equations, Lawrence C. Evans, (ch1–4)

Partial Differential equations – Hesaraki, Fotouhi (ch1–3)

Advanced Engineering Mathematics, Erwin Kreyszig (ch11, 12)

سرفصل درس:

آنالیز فوریه: سری، انتگرال، تبدیل

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی: دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی، مسایل با شرایط اولیه و مرزی

معادلات بیضوی: مدل سازی - جواب اساسی - روش جداسازی متغیرها برای مسایل با شرایط مرزی - معادلات لاپلاس و پواسن تابع گرین و مساله دیریکله

معادلات سهموی: مدل سازی - روش جداسازی متغیرها برای مسایل با شرایط اولیه - مرزی - معادلات حرارت - اصل ماکسیمم وجود و یکتایی جواب

معادلات هذلولوی: روش مشخصه‌ها - قانون بقا در یک بعدی - معادله موج

۱-۱ پیدایش سری مثلثاتی و فوریه

برنولی، دالامبر، لاگرانژ و اویلر در دهه پنجم قرن هجدهم در تحقیقات در زمینه مسایل ریاضی فیزیک به این نتیجه رسیدند که نمایش تابع متناوبی با دوره تناوب 2π به صورت یک سری از توابع مثلثاتی حل بسیاری از این گونه مسایل را مقدور می‌سازد.

برای مدت هفتاد سال تحقیقات فراوانی بر روی سری‌ها در این زمینه به عمل آمد که منجر به گسترش آنالیز ریاضی شد. فوریه در سال‌های 1807-1811 در این زمینه به مطالعه پرداخت و در سال 1811 ادعا کرد که هر تابع متناوبی با دوره تناوب 2π را می‌توان به صورت ترکیب خطی از سینوس‌ها و کسینوس‌ها نوشت. فوریه این مطالب را در کتاب Theory of Heat Transform در سال 1822 منتشر کرد.

(امروزه این ترکیب‌های خطی را سری فوریه می‌نامند)

در سال‌های 1823-7 پواسن و کوشی به صورت جداگانه اثبات‌هایی برای نمایش توابع متناوبی به صورت سری فوریه ارائه کردند که با اعمال قیدهای غیرضروری بر روی تابع انجام می‌شد.

در واقع، دیریکله را باید اولین فردی دانست که مطالعه دقیق و سختگیرانه‌ای روی سری فوریه انجام داده است و قضیه‌ای که وی در سال 1829 در این مورد ارائه داده است، هنوز یکی از بهترین‌هاست.

تفاوت ظریفی بین سری‌های مثلثاتی و سری فوریه وجود دارد. در واقع هر سری مثلثاتی و متناوبی همراه با ضرایبش سری فوریه یک تابع انتگرال‌پذیر نیست.

در واقع، نظریه سری‌های مثلثاتی می‌تواند حاوی نکات و سوالاتی باشد که در سری‌های فوریه با آنها مواجه نخواهیم بود. به عنوان مثال، یک سری فوریه روی بازه‌ای انتگرال‌پذیر است اما در مورد سری‌های مثلثاتی این مطلب بایستی بررسی شود.

- سیگنال‌های ECG قلب
- هر شکل موج و سیگنال‌های طبیعت را می‌توان با مجموعه‌ای از فرکانس‌ها ساخت. اینکه در فلان شکل موج (یا فلان تابع ریاضی) چه فرکانس‌هایی وجود دارد از طریق سری‌های فوریه مشخص می‌شود.

- مطالعه سری‌های فوریه ← آنالیز هارمونیک

- شیمی فیزیک و کوانتوم برای ردیابی الکترون در اطراف هسته و مسایلی همچون ذره در جعبه

- محاسبات تصویری (MRI)
- فیزیک پزشکی (جهت ایجاد تصویر نهایی، اطلاعات امواج ساطع شده از هسته‌های هیدروژن از حوزه فرکانسی به حوزه فضایی تبدیل فوریه می‌شوند).

- دینامیک سازه‌ها و ارتعاشات مکانیکی برای تعیین پاسخ سازه در برابر تحریکات غیرهارمونیک. از تبدیلات فوریه برای تبدیل این تحریکات به اجزای هارمونیک استفاده شده، پس می‌توان اقدام به حل معادله دیفرانسیل حرکت سازه نمود
- تجزیه و تحلیل مدارهای مخابراتی و مدارهای قدرت (برای بدست آوردن هارمونیک‌های پدیدآورنده یک شکل موج)

2.1 سری فوریه و محاسبه ضرایب

قبل از تعریف سری فوریه به مروری از توابع متناوب می‌پردازیم.

تعریف. تابع f متناوب نامیده می‌شود هرگاه عدد حقیقی مانند T وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x، داشته باشیم

$$f(x+T)=f(x) \qquad (1-1)$$

عدد T را دوره تناوب تابع $f(x)$ می‌نامند. نمودار چنین توابعی از تکرار دوره‌ای نمودار تابع در بازه‌ای به طول T، حاصل می‌شود.

اگر T دوره تناوب تابعی باشد، $2T$، $3T$ و ... نیز دوره‌های تناوب آن هستند.
کوچکترین مقدار T را، در صورت وجود، که در رابطه (1-1) صدق کند، دوره تناوب اصلی می‌نامند.

مثال 1. توابع $\sin x$ و $\cos 2x$ توابع متناوب با دوره تناوب 2π هستند ولی دوره تناوب اولیه آن‌ها به ترتیب 2π و π است.

مثال 2. هر عدد حقیقی را می‌توان به عنوان دوره تناوب تابع ثابت $f(x)\equiv 1$ در نظر گرفت ولی این تابع دوره تناوب اولیه ندارد.

تبصره. مجموع دو تابع متناوب در صورت لزوم یک تابع متناوب نیست. به عنوان مثال، مجموع $\sin x+\sin \pi x$ تابع متناوب نیست در صورتی که هر یک از توابع $\sin x$ و $\sin \pi x$ متناوب اند. اما اگر دوره تناوب دو تابع متناوب برابر باشد آن گاه مجموع آن‌ها نیز متناوب است.

فوریه ادعا کرد که هر تابع متناوب مانند $f(x)$ با دوره تناوب $T=2l$ را می‌توان برحسب ترکیب خطی از توابع

$$1,\ \sin\frac{\pi}{l}x,\ \cos\frac{\pi}{l}x,\ \sin\frac{2\pi}{l}x,\ \cos\frac{2\pi}{l}x,\ \dots,$$

نمایش داد، یعنی،

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (2.1)$$

که در آن $a_i, b_i\in\mathbb{R}$.

توابع متناوب که در مسایل مهندسی مطرح می‌شوند، اغلب نسبتاً پیچیده‌اند. لذا نمایش این توابع برحسب توابع متناوب ساده مفید است. در ادامه این فصل، نشان می‌دهیم که تقریباً هر تابع متناوب با دوره تناوب $2l$ را می‌توان به صورت سری مثلثاتی (2.1) نمایش داد که آن را سری فوریه می‌نامند.

فرمول‌های اویلر برای محاسبه ضرایب فوریه

فرض کنید سری فوریه به غیر از تعداد متناهی نقطه در هر دوره تناوب در بقیه نقاط برابر مقدار $f(x)$ باشد (همگرا به $f(x)$). در این قسمت، ضرایب a_0، a_n و b_n را محاسبه می‌کنیم.

با توجه به اینکه مقدار سری به غیر از تعداد متناهی نقطه در بازه $[-l, l]$ برابر مقدار تابع است، انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری در بازه مذکور مجاز است (در واقع فرض بر این است که سری همگرای یکنواخت است). بنابراین

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]dx$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]$$

با توجه به روابط (3.1)

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0$$

داریم

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx$$

- لزومی ندارد که در بازه $[-l, l]$ و یا $[0, 2l]$ انتگرال‌گیری شود. با توجه به اینکه f تابعی متناوب با دوره تناوب $2l$ است، کافی است طول بازه انتگرال‌گیری $2l$ باشد. در واقع می‌توان آن را به صورت $[c, c+2l]$ انتخاب کرد.

مثال: فرض کنید f یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد. نشان دهید

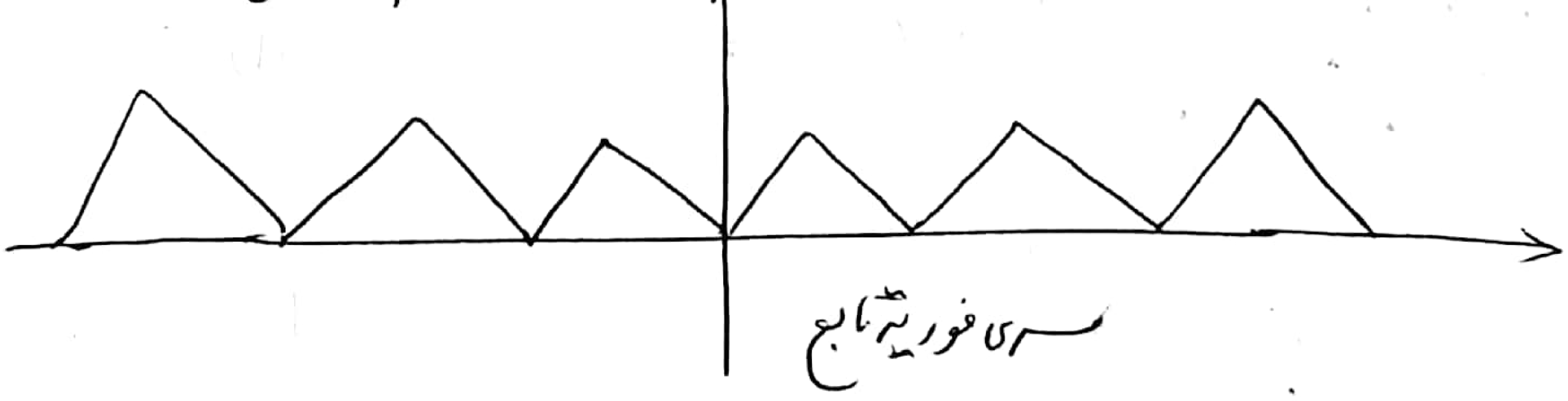
$$(i)\quad \int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

$$(ii)\quad \int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

$$(iii)\quad \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$$

- وقتی در طرف دوم تعداد جملات به سمت بی‌نهایت میل کند در حد، شکل نمودار سمت راست مساوی با شکل نمودار طرف اول یکسان می‌شود. بنابراین برای رسم شکل سری فوریه کافی است نمودار تابع متناوب سمت چپ را رسم کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$



برای محاسبه a_n ، $n\geq 1$ ، طرفین رابطه (2.1) را در $\cos\frac{m\pi x}{l}$ ضرب کرده، سپس انتگرال می‌گیریم. (مجدداً فرض کنید انتگرال‌گیری جمله به جمله مجاز است و از $t=-l$ تا $t=l$ انتگرال بگیرید)

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right]\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right)$$

با توجه به روابط

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ l, & n=m\end{cases}\qquad(4.1)$$

و

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=0\qquad(5.1)$$

داریم

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=0,1,2,\dots\qquad(6.1)$$

به طور مشابه، با ضرب طرفین (2.1) در $\sin\frac{m\pi x}{l}$ و با توجه به روابط (3.1)، (5.1) و تساوی

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ l, & n=m\end{cases}\qquad(7.1)$$

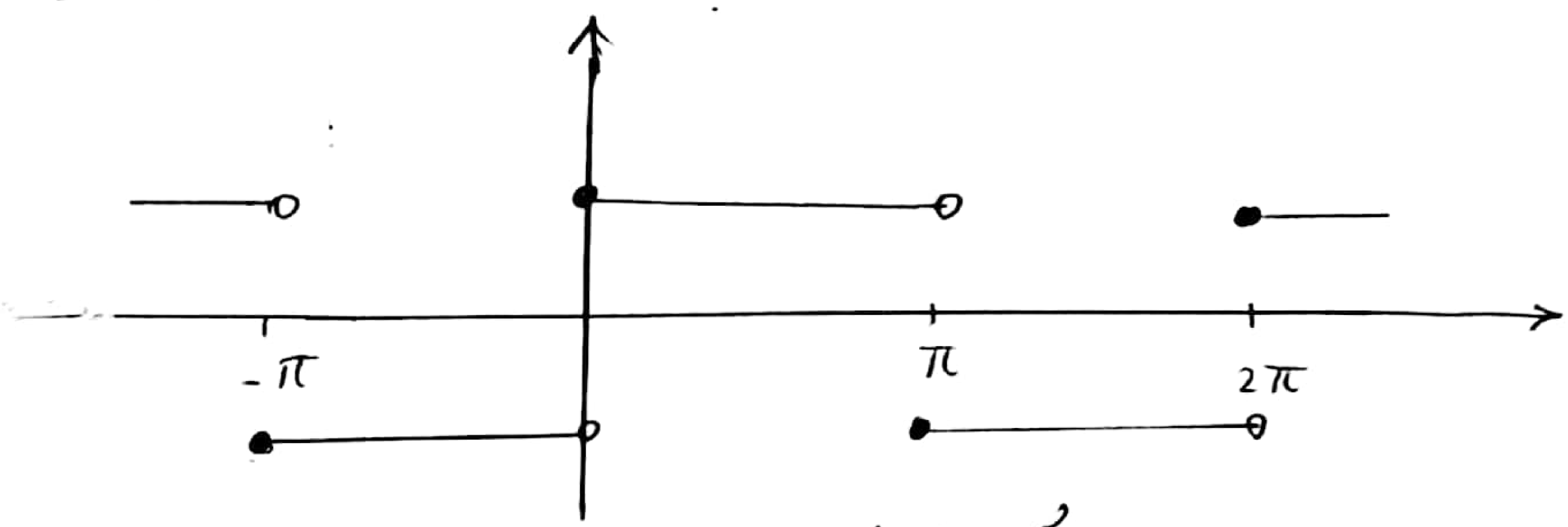
داریم

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad n=1,2,\dots\qquad(8.1)$$

روابط (6.1) و (8.1) برای محاسبه ضرایب فوریه را روابط اویلر می‌نامند.

مثال 3. فرض کنید تابع $f(x)$ با ضابطه زیر تعریف شود

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leq x<0\\ 1, & 0\leq x<\pi\end{cases}\quad,\quad f(x+2\pi)=f(x)$$



سری فوریه متناظر با آن را بیابید.

در محاسبه ضرایب a_n و b_n ممکن است برای مقادیر خاصی از n، حالتی مبهم در جملات انتگرال‌گیری به وجود آید، مانند حالت $n=0$ در مثال قبل. در این صورت، این حالات را باید جداگانه محاسبه کرد.

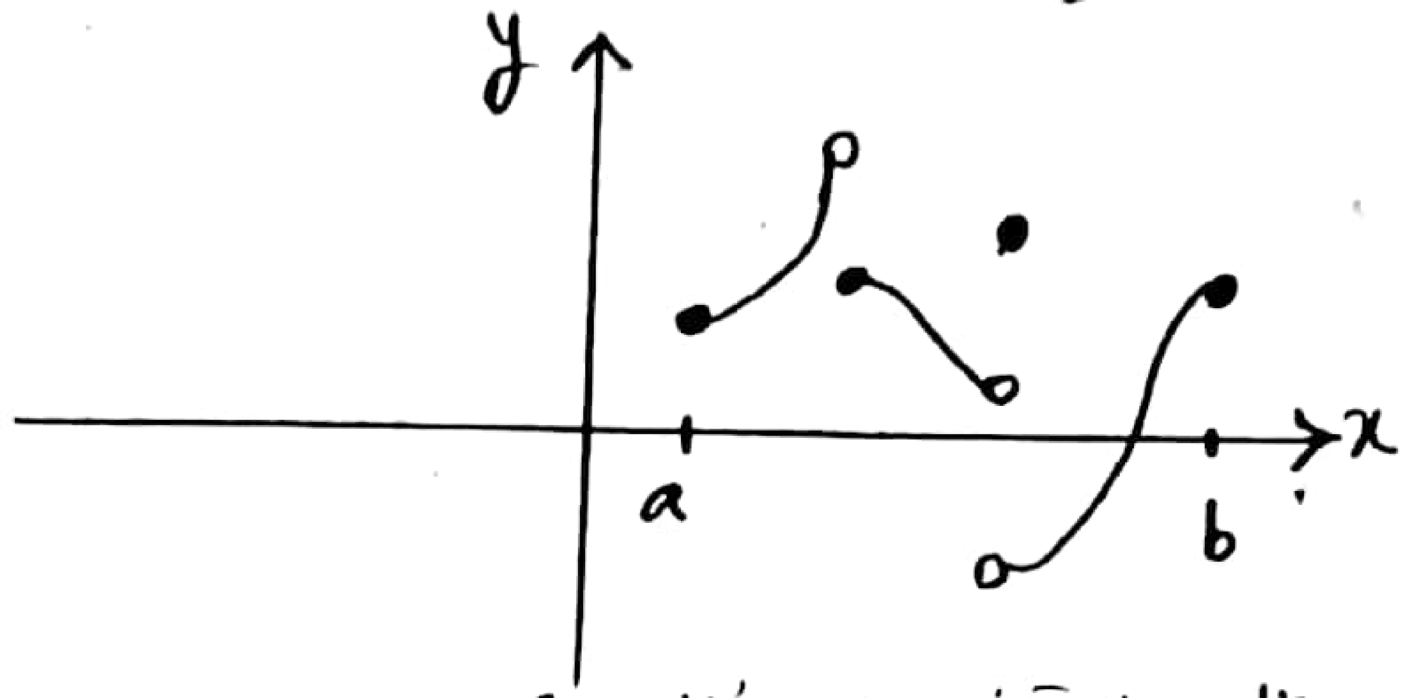
مثال 4. سری فوریه تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=x,\quad f(x+1)=f(x)$$

تبصره. مقدار $T=2l$ در سری فوریه به عنوان یکی از دوره‌های تناوب تابع $f(x)$ ظاهر می‌شود نه دوره تناوب اصلی. در واقع، سری فوریه مستقل از دوره تناوب تابع است. بدین معنی که چنانچه با دو دوره تناوب متفاوت، سری فوریه یک تابع را بدست آوریم، نتیجه یکسان خواهد بود.

قبل از بیان قضیه همگرایی سری فوریه، تابع قطعه قطعه پیوسته را تعریف می‌کنیم.

تعریف. تابع f در بازه $[a,b]$ قطعه قطعه پیوسته است هرگاه تعداد متناهی نقطه $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ وجود داشته باشند بطوری که f در زیربازه‌های (x_i, x_{i+1}) پیوسته بوده و در نقاط انتهایی هر زیربازه به یک عدد متناهی همگرا باشد.



شرایط وجود سری فوریه یک تابع از قضیه زیر نتیجه می‌شود

قضیه. فرض کنید f یک تابع متناوب با دوره تناوب $2l$ و کراندار باشد. همچنین، فرض کنید f قطعه قطعه پیوسته و حداکثر تعداد متناهی اکسترمم موضعی در هر یک از دوره‌های خود داشته باشد. در این صورت، سری فوریه متناظر با $f(x)$ در نقاط پیوستگی تابع به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی تابع به میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ به صورت نقطه‌ای همگرا می‌شود.

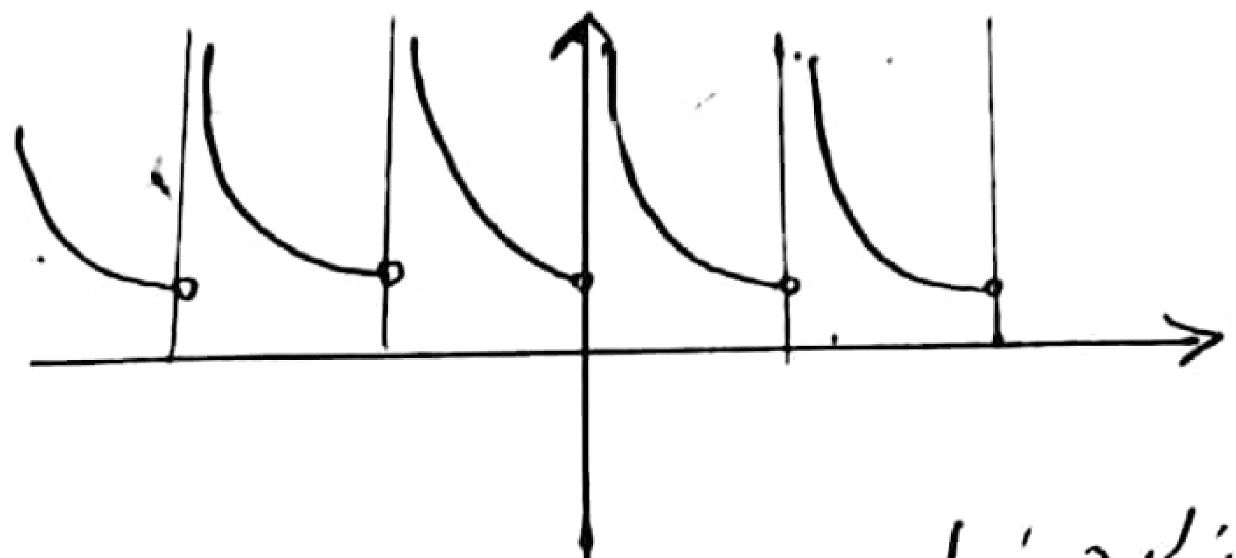
- شرایط قضیه فوق که شرایط دیریکله نامیده می‌شود، مشخص می‌کند که لزومی ندارد تابعی پیوسته باشد تا سری فوریه آن موجود باشد. قضیه فوق شرایط کافی برای همگرایی این سری فوریه را بیان می‌کند.

در ادامه چند مثال برای شرایط دیریکله بیان می‌شود.

مثال 5. اساسی‌ترین شرط وجود سری فوریه، متناوب بودن تابع است. حال چه تابع ذاتاً متناوب باشد و یا در یک بازه خاص تعریف شده باشد و در بیرون آن بازه به صورت متناوب گسترش یافته باشد.

بنابراین تابع $f(x)=\sin x^2$ دارای سری فوریه نیست.

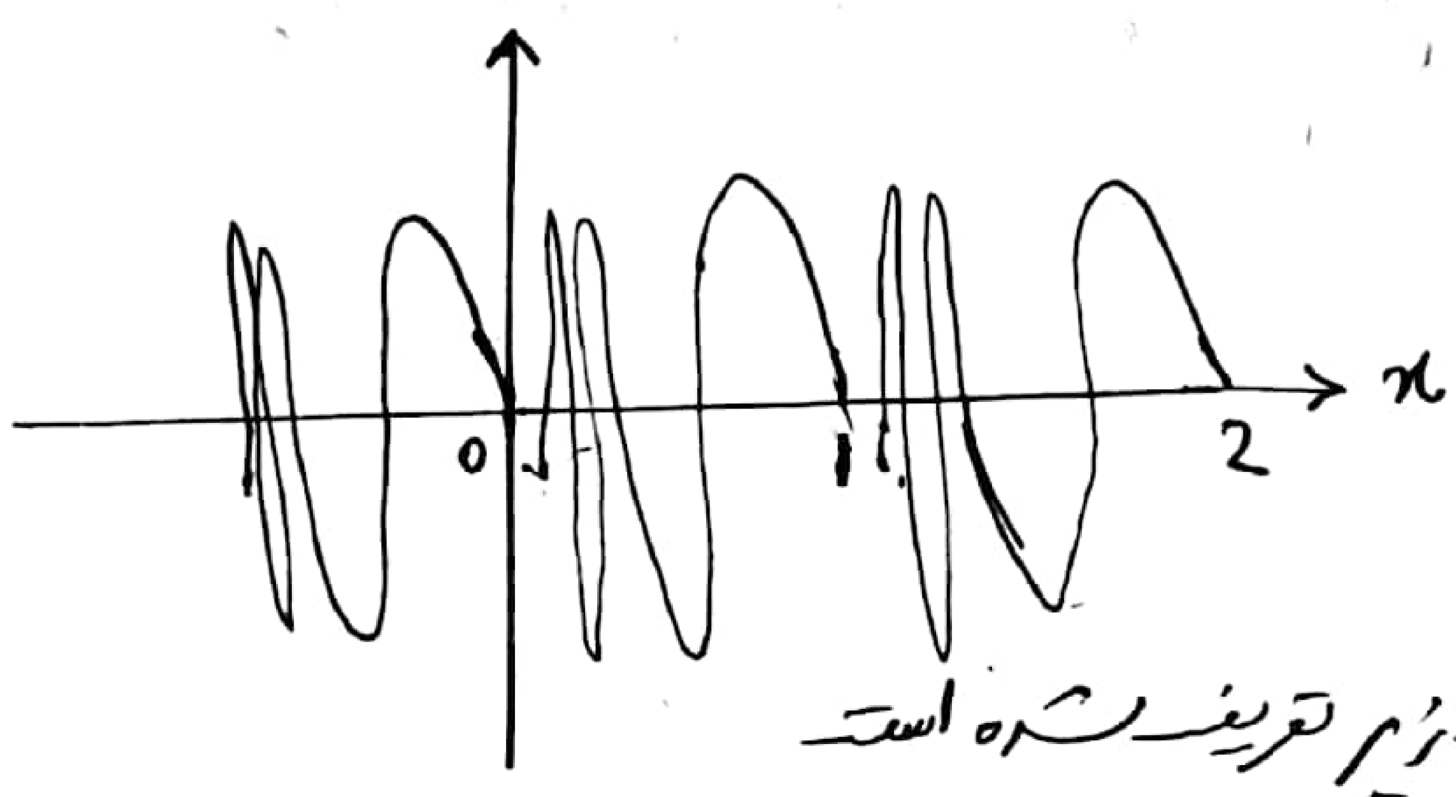
مثال 6. تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت $0<x<1$ ، $f(x)=\frac{1}{x}$ تعریف شده است.



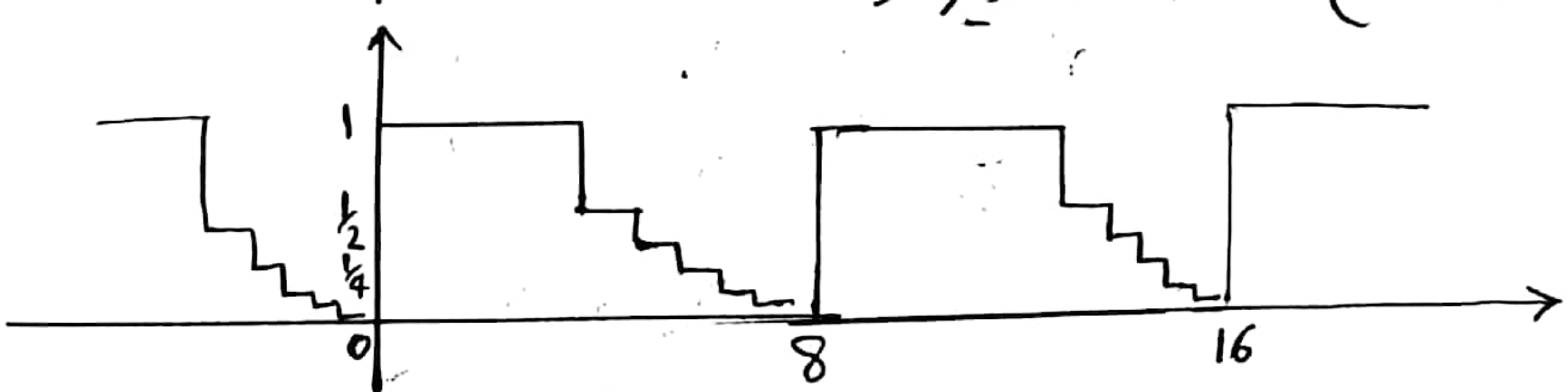
تابع فوق سری فوریه ندارد زیرا

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$$

مثال 7. تابع $f(x)$ در یک دوره تناوب به صورت $0<x<1$ ، $f(x)=\sin\frac{2\pi}{x}$ تعریف شده است.
این تابع سری فوریه ندارد چون تعداد اکسترمم‌های آن در یک دوره تناوب نامحدود است.



مثال 8. تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف شده است



این تابع دارای سری فوریه نیست زیرا تعداد گسستگی‌ها در یک دوره تناوب نامحدود است.

مثال 9. مقدار سری فوریه متناظر تابع متناوب $-\pi<x<\pi$ ، $f(x)=x^2+x$ در نقطه $x=\pi$ را بیابید.

3.1 سری فوریه توابع زوج و فرد

در تعیین ضرایب فوریه یک تابع، اگر تابع زوج یا فرد باشد می‌توان از محاسبات غیرضروری اجتناب کرد.

قضیه. سری فوریه تابع زوج f با دوره تناوب $2l$، یک سری فوریه کسینوسی است، یعنی،

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

که در آن

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,\qquad n=0,1,2,\dots$$

همچنین، سری فوریه تابع فرد f با دوره تناوب $2l$، یک سری فوریه سینوسی است، یعنی

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

که در آن

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

نتایج فوق، زحمت بسط دادن چنین توابعی را به نصف کاهش می‌دهد. علاوه بر این، این امکان را فراهم می‌سازد که در برخی مسایل که در آن‌ها لازم است بسط‌هایی فقط شامل جملات کسینوسی و یا سینوسی تشکیل شود، خواسته مسأله برآورده شود.

مثال ۱۰. سری فوریه توابع زیر که ضابطه آن‌ها در یک دوره تناوب مشخص شده است را بیابید:

(i) $f(x)=|x|,\quad -l<x\leq l$

(ii) $f(x)=x+\pi,\quad -\pi<x\leq\pi$

بسط نیم دامنه‌ای

توابعی که تا به حال تعریف شد نه تنها در تمام دامنه، بلکه با دوره تناوب معین توابع از $-\infty$ تا $+\infty$ مشخص بودند اما در بعضی از مسایل لازم است که بتوان تابع را تنها به صورت سری سینوسی و یا کسینوسی نمایش داد. اگر تابع تنها در نیمی از دامنه تعریف یعنی در بازه $(0, l)$ تعریف شده باشد می‌توان آن را به صورت یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=l$ بر همه مجموعه اعداد حقیقی گسترش داد. در این صورت، سری فوریه آن شامل جملات سینوسی و کسینوسی خواهد بود. برای اینکه بتوان به خواسته مساله رسید و تابع f را در بازه $(0, l)$ تنها با جملات سینوسی و یا کسینوسی نمایش داد، باید آن را به صورت تابع متناوب فرد و یا زوج با دوره تناوب $T=2l$ توسعه داد.

توسعه تناوبی زوج

تابع متناوب F با ضابطه

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l, \\ f(-x), & -l<x<0, \end{cases}$$

و $F(x+2l)=F(x)$، تابعی زوج است. این تابع را توسعه تناوبی زوج f می‌نامند و سری فوریه آن عبارت است از

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

که در آن

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \quad n=0,1,2,\dots$$

توسعه تناوبی فرد

تابع متناوب G با ضابطه

$$G(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<l \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & -l<x<0 \end{cases}$$

و $G(x+2l)=G(x)$، تابعی فرد است. این تابع را توسعه تناوبی فرد f می‌نامند و سری فوریه آن عبارت است از

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

که در آن

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx, \quad n=1,2,\dots$$

* فرمول های ضرایب بسط های کسینوسی و سینوسی فقط به مقادیر f در بازه اولیه $(0,l)$ وابسته اند و به هیچ وجه به گسترش هایی که برای بدست آوردن این فرمول ها استفاده شده است، وابستگی ندارند. علاوه بر این، برقراری تساوی سری فوریه با مقدار تابع فقط در بازه $(0,l)$ است که نیم دامنه هر یک از حالات سری ها است. بر این دلیل چنین سری هایی به بسط های نیم دامنه ای معروفند.

* اگر تابع f در مبدأ صفر نباشد آن گاه $x=0$ یک نقطه ناپیوستگی برای توسعه تناوبی فرد تابع f است و مقدار سری فوریه در دو سر بازه $(0,l)$ برابر صفر است.

مثال 11. سری فوریه توسعه های تناوبی زوج و فرد تابع $f(x)=1-x$ را در بازه $[0,1]$ بدست آورید.

مثال 12 (الف) بسط سینوسی تابع $f(x)=\cos x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$ را بدست آورده و رسم کنید.

(ب) « کسینوسی تابع $f(x)=\sin x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$ « « « « « .

مثال 13. در رابطه زیر مقدار $F(n)$ را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\sin(nx)=e^{x}\ ,\quad 0<x<\pi$$

مثال 14. فرض کنید $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$. مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} f(x)\sin^3 x\,dx$ را بیابید.

4.1 استفاده از پرش‌ها برای محاسبه ضرایب فوریه

در بسیاری از مسایل، انتگرال گیری جزء به جزء برای محاسبه ضرایب فوریه، لازم است. بنابراین، این ایده مطرح می‌شود که شاید بتوان فرمول‌های اویلر برای محاسبه این ضرایب را با انتگرال گیری جزء به جزء ساده‌تر کرد. در این بخش روشی برای تعیین این ضرایب بدون انتگرال گیری ارائه می‌شود. در واقع، نشان می‌دهیم تعداد جملات محاسبه شده در ضرایب a_n و b_n به همواری تابع f وابسته است. به بیان دیگر، هرچه تعداد نقاط ناهمواری بیشتر باشد، تعداد جملات در ضرایب a_n و b_n بیشتر خواهد شد.

تابع $f(x)$ در نقطه x_k دارای پرش J_k است اگر و تنها اگر

$$J_k = f(x_k^+) - f(x_k^-) \neq 0,$$

که در آن $f(x_k^+)$ و $f(x_k^-)$ به ترتیب حدهای راست و چپ هستند.

با توجه به اینکه شرایط دیریکله بر وجود حدهای چپ و راست در همه نقاط دلالت دارند، توابعی که بررسی می‌کنیم همگی دارای پرش‌های خوش تعریف در آن نقاط هستند. اگر f یک ناپیوستگی متناهی در x_k داشته باشد آن‌گاه J_k اندازه تغییر ناگهانی f در x_k است. اگر f در x_k پیوسته باشد آن‌گاه $J_k = 0$.

برای یافتن یک فرمول مطلوب برای محاسبه a_n به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$l a_n = \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx,$$

با محاسبه انتگرال‌های فوق به روش جزء به جزء داریم

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \cos\frac{n\pi}{l}x \, dx = \frac{l}{n\pi} f(x) \sin\frac{n\pi}{l}x \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \frac{l}{n\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x) \sin\frac{n\pi}{l}x \, dx,$$

با توجه به اینکه $f(x)$ ممکن است در نقاط x_{k-1} و x_k ناپیوسته باشد، در محاسبه عبارت اول طرف راست تساوی فوق باید $f(x_k^-)$ و $f(x_{k-1}^+)$ را در نظر گرفت. بنابراین عبارت اول طرف راست تساوی فوق برابر است با

$$\frac{l}{n\pi}\left(f(x_k^-)\sin\frac{n\pi}{l}x_k - f(x_{k-1}^+)\sin\frac{n\pi}{l}x_{k-1}\right).$$

حال اگر روی k جمع ببندیم با توجه به اینکه $\sin\frac{n\pi}{l}x_0 = \sin\frac{n\pi}{l}x_m$، داریم

$$la_n = -\frac{l}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} J_k \sin\frac{n\pi}{l}x_k - \frac{l}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

با انجام مراحل مشابه برای انتگرال طرف راست تساوی بالا داریم

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{l}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} J'_k \cos\frac{n\pi}{l}x_k + \frac{l}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

با ادامه روش فوق، به انتگرال‌هایی که شامل مشتقات بالاتر f هستند می‌رسیم. روش فوق زمانی مفید است که مشتقات متوالی f با عباراتی که مرتباً ساده‌تر می‌شوند، مشخص گردد. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که f با چندجمله‌ایها نمایش داده شده باشد. در واقع، فرض کنید f با چندجمله‌ایهایی از درجه r و کمتر نمایش داده شود. در این صورت، مشتق مرتبه $(r+1)$ ام f برابر صفر می‌شود، لذا بعد از r مرحله به جایی می‌رسیم که دیگر انتگرالی باقی نمی‌ماند. با جایگذاری فرمولهای مربوط به مشتقات متوالی در فرمولهای قبلی برای تعیین a_n به رابطه زیر می‌رسیم

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left(-\sum_{k=1}^{m} J_k\sin\frac{n\pi}{l}x_k - \frac{l}{n\pi}\sum_{k=1}^{m} J'_k\cos\frac{n\pi}{l}x_k + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m} J''_k\sin\frac{n\pi}{l}x_k + \frac{l^3}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{m} J'''_k\cos\frac{n\pi}{l}x_k - + + \cdots\right),$$

$$n=1,2,\ldots$$

به طور مشابه، داریم

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\Big(\sum_{k=1}^{m}J_k\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k-\frac{\ell}{n\pi}\sum_{k=1}^{m}J_k'\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k$$
$$-\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sum_{k=1}^{m}J_k''\cos\frac{n\pi}{\ell}x_k+\frac{\ell^3}{n^3\pi^3}\sum_{k=1}^{m}J_k'''\sin\frac{n\pi}{\ell}x_k+\cdots\Big).$$

مثال ۱۵. ضرایب فوریه تابع موج مربعی زیر را بیابید:

$$f(x)=\begin{cases}-k, & -\pi<x<0,\\ k, & 0<x<\pi,\end{cases}\qquad f(x+2\pi)=f(x).$$

مثال 16. تابع f در بازه $(0,\ell)$ فقط دارای یک نقطه ناپیوستگی در $c\in(0,\ell)$ است بطوری که قبل از آن خطی است و بعد از آن نیز خطی است، $f'(\ell^+)=f'(\ell^-)$. ضرایب فوریه کسینوسی نیم دامنه این تابع را بیابید.

5.1 مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

فرض کنید تابع متناوب با دوره تناوب $T=2l$، f دارای سری فوریه به شکل زیر باشد

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

هرگاه مشتق f تابعی مانند $g(t)=f'(t)$ باشد به طوری که

$$f'(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{l}x+B_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

لازم است که f تابعی پیوسته باشد ولی لزومی ندارد g پیوسته باشد. در واقع، قطعه قطعه پیوسته بودن g کافی است. از طرفی داریم

$$\begin{cases} A_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f'(x)\,dx=\dfrac{1}{l}\left[f(l)-f(-l)\right]=0, \\[2ex] \left(\dfrac{a_0}{2}\right)'=\dfrac{A_0}{2}=0, \end{cases}$$

لذا f باید رفتاری همچون $f(l)=f(-l)$ داشته باشد. در این صورت

$$A_n=\frac{n\pi}{l}b_n,\quad B_n=\frac{-n\pi}{l}a_n.$$

قضیه. فرض کنید f پیوسته و f' قطعه قطعه پیوسته و $f(l)=f(-l)$ باشد که در شرایط دیریکله صدق می‌کنند، در این صورت از سری فوریه متناظر $f(x)$ می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت. سری حاصل از مشتق‌گیری، در نقاط پیوستگی مشتق به مقدار مشتق و در نقاط ناپیوستگی به میانگین مشتق چپ و راست تابع همگرا می‌شود.

اگر شرط $f(-l^+)=f(l^-)$ اعمال نشود، آنچه در بالا بیان شد ممکن است برقرار نباشد. به عنوان مثال، تابع $f(x)=x$ را در بازه $(0,2\pi)$ در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_0=2\pi,\ a_n=0,\ b_n=-\frac{2}{n}$$

و

$$f(x)=x=\pi-2\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n},\quad 0<x<2\pi,$$

اما

$$f'(x)=1\neq-2\sum_{1}^{\infty}\cos(nx)$$

(سری شرایط لازم همگرایی را ندارد)

انتگرال گیری از سری فوریه

فرض کنید f یک تابع متناوب با دوره تناوب $2l$ باشد که در شرایط دیریکله صدق می‌کند. در این صورت، از سری فوریه متناظر با f می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. لازم به ذکر است سری فوریه حاصل از انتگرال گیری لزوماً سری فوریه پادمشتق f نیست.

فرض کنید

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

در این صورت

$$\int f(x)\,dx=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{n\pi}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x-\frac{l}{n\pi}b_n\cos\frac{n\pi}{l}x\right)+C$$

که در آن ثابت C پس از انتگرال گیری از طرفین محاسبه می‌شود.

رابطه فوق به سری فوریه تابع $\int f(x)dx$ نیست بلکه سری فوریه $\int f(x)dx - \frac{a_0}{2}x$ است. برای یافتن سری فوریه $\int f(x)dx$ باید سری فوریه متناظر با x در بازه متناوب مورد بحث را در رابطه حاصل جایگذاری کرد.

مثال ۱۷. اگر سری فوریه تابع $f(x)=2x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ برابر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$$

باشد، سری فوریه تابع $g(x)=x^2-\pi^2$ را بدست آورید.

مثال ۱۸. اگر بسط به سری کسینوسی فوریه $f(x)=x,\ 0<x<\pi$ به صورت

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots\right),$$

باشد، بسط به سری سینوسی فوریه $g(x)=x(\pi-x)\frac{\pi}{8}$ در $0<x<\pi$ را بیابید.

نکته. یکی از کاربردهای سری فوریه محاسبه مقدار سری‌های عددی است. به‌عنوان مثال، سری فوریه مثال 3 را در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases},\quad f(x+2\pi)=f(x),$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right),$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{2}$ در رابطه بالا داریم

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2}+\cdots\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)=1,$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

مثال ۱۹. با در نظر گرفتن سری فوریه تابع $f(x)=x$ در فاصله $|x|<1$ یعنی

$$f(x)=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k},$$

مقدار سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ و $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots$ را بیابید.

اتحاد پارسوال

فرض کنید سری فوریه تابع f که در شرایط قضیه دیریکله صدق می‌کند، به صورت زیر باشد

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

در این صورت

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)+\frac{a_0^2}{2}.$$

در حالت کلی، هرگاه سری فوریه متناظر با تابع $g(x)$ نیز به صورت زیر باشد

$$g(x)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^*\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n^*\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

آنگاه

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)g(x)\,dx=\frac{a_0a_0^*}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_na_n^*+b_nb_n^*\right)$$

مثال 20. اگر بسط فوریه کسینوسی تابع $f(x)=\sin x$، $\pi>x>0$ یعنی $0<x<\pi$ به صورت

$$F(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{2}^{\infty}\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}\cos nx,$$

باشد، مقدار سری

$$\frac{1}{1^2\times3^2}+\frac{1}{3^2\times5^2}+\frac{1}{5^2\times7^2}+\cdots,$$

را بدست آورید.

مثال 21. اگر بسط به سری فوریه زیر را داشته باشیم

$$x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi)-1\right)\cos\frac{n\pi}{2}x,\quad 0<x<2,$$

بسط تابع $f(x)=x(x-2)$، $0<x<2$ را با استفاده از آن بدست آورید.

سپس درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

6.1 صورت مختلط سری فوریه

بکارگیری اعداد مختلط در مسایل اعداد حقیقی گاهی اوقات موجب کاهش محاسبات، حجم نوشته‌ها و فرمول‌ها می‌شوند. در این بخش با استفاده از اعداد مختلط صورت اصلی سری فوریه یک تابع را به شکل دیگر و با به کار بردن تابع نمایی موهومی به جای توابع مثلثاتی نمایش می‌دهیم.

فرض کنید تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب $2l$ دارای سری فوریه به صورت زیر باشد

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

که در آن

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

با انجام برخی محاسبات ساده، سری فوق را می‌توان به صورت مختلط نمایش داد. برای این کار می‌توان از فرمول اویلر استفاده کرد

$$e^{it} = \cos t + i\sin t,$$

با جایگذاری $t = nx$ و $t = -nx$ در فرمول اویلر داریم

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx),$$

$$e^{-inx} = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = \cos(nx) - i\sin(nx),$$

لذا

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{\frac{in\pi}{l}x} + e^{-\frac{in\pi}{l}x}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{in\pi}{l}x} - e^{-\frac{in\pi}{l}x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{in\pi}{l}x}\left(a_n + \frac{1}{i}b_n\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{in\pi}{l}x}\left(a_n - \frac{1}{i}b_n\right)\right)$$

فرض کنید $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$. در این صورت

$$c_{-n} = \frac{a_{-n} - i b_{-n}}{2} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در سری فوریه $f(x)$ داریم

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{in\pi}{l}x} + c_{-n} e^{-\frac{in\pi}{l}x}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{1}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x} + \sum_{1}^{\infty} c_{-n} e^{-\frac{in\pi}{l}x}$$

$$= c_0 + \sum_{1}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x} + \sum_{-\infty}^{-1} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x},$$

که در آن

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{l}x - i\sin\frac{n\pi}{l}x\right]dx\right]$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi}{l}x}\, dx$$

مثال 22. سری فوریه مختلط توابع زیر را بدست آورید.

(i) $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x+2\pi) = f(x);$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x);$

P24

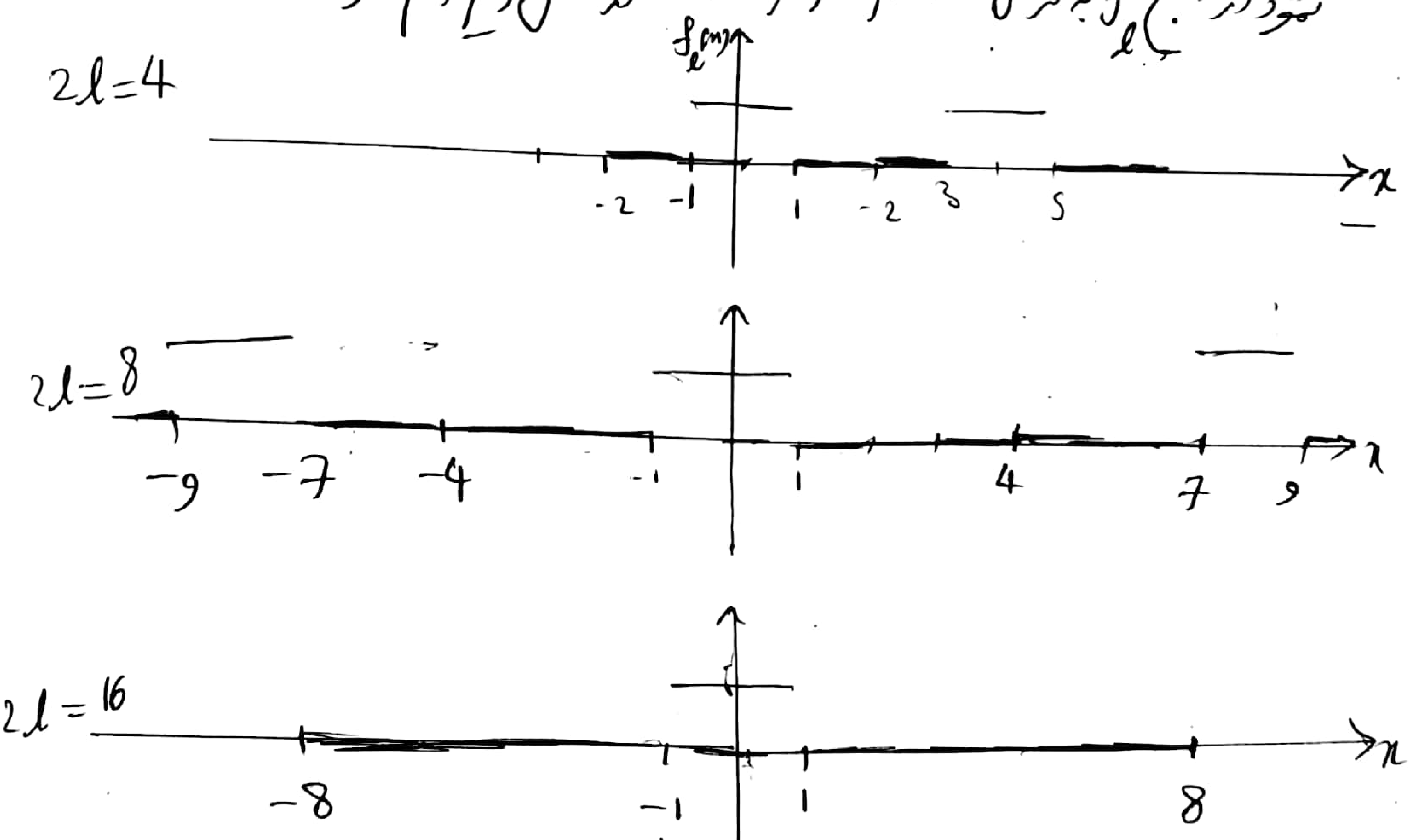
۷.۱ انتگرال فوریه

ویژگی‌هایی که از سری فوریه تاکنون بیان شد برای بسط دادن هر تابع متناوب که در شرایط دیریکله صدق کند کفایت می‌کند و با استفاده از آن می‌توان پاسخ سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی متعددی را با اختلال‌های دوره‌ای کلی تعیین کرد ولی بسیاری از مسائل شامل توابع غیرمتناوب هستند یا توابعی که در کل محور x تعریف شده‌اند به عنوان مثال، نیرو یا ولتاژ اعمال شده و یا یک پالس تنها. این توابع را نمی‌توان مستقیماً با استفاده از سری فوریه مطالعه کرد. با این وجود، با بررسی حد سری فوریه وقتی دوره تابع متناوب بی‌نهایت شود (در صورت وجود حد) شاید بتوان نمایش مناسبی از توابع غیرمتناوب بدست آورد.

فرض کنید $f_l(x)$ روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف شود

$$f_l(x)=\begin{cases}0, & -l<x<-1,\\ 1, & -1<x<1,\\ 0, & 1<x<l,\end{cases}$$

نمودار تابع f_l به ازای $2l=4,8,16,\dots$ در شکل زیر رسم شده است



هرگاه $l \to \infty$ آنگاه $f_l(x)$ به یک تابع غیرمتناوب میل می‌کند، یعنی:

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} f_l(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

حال ضرایب فوریه تابع $f_l(x)$ را وقتی l افزایش می‌یابد، بررسی می‌کنیم.

$$f_l \text{ زوج است } \Rightarrow \begin{cases} b_n = 0 \\ a_0, a_n \ ? \end{cases}$$

بسط فوریه تابع $f_l(x)$ به صورت زیر است

$$f_l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

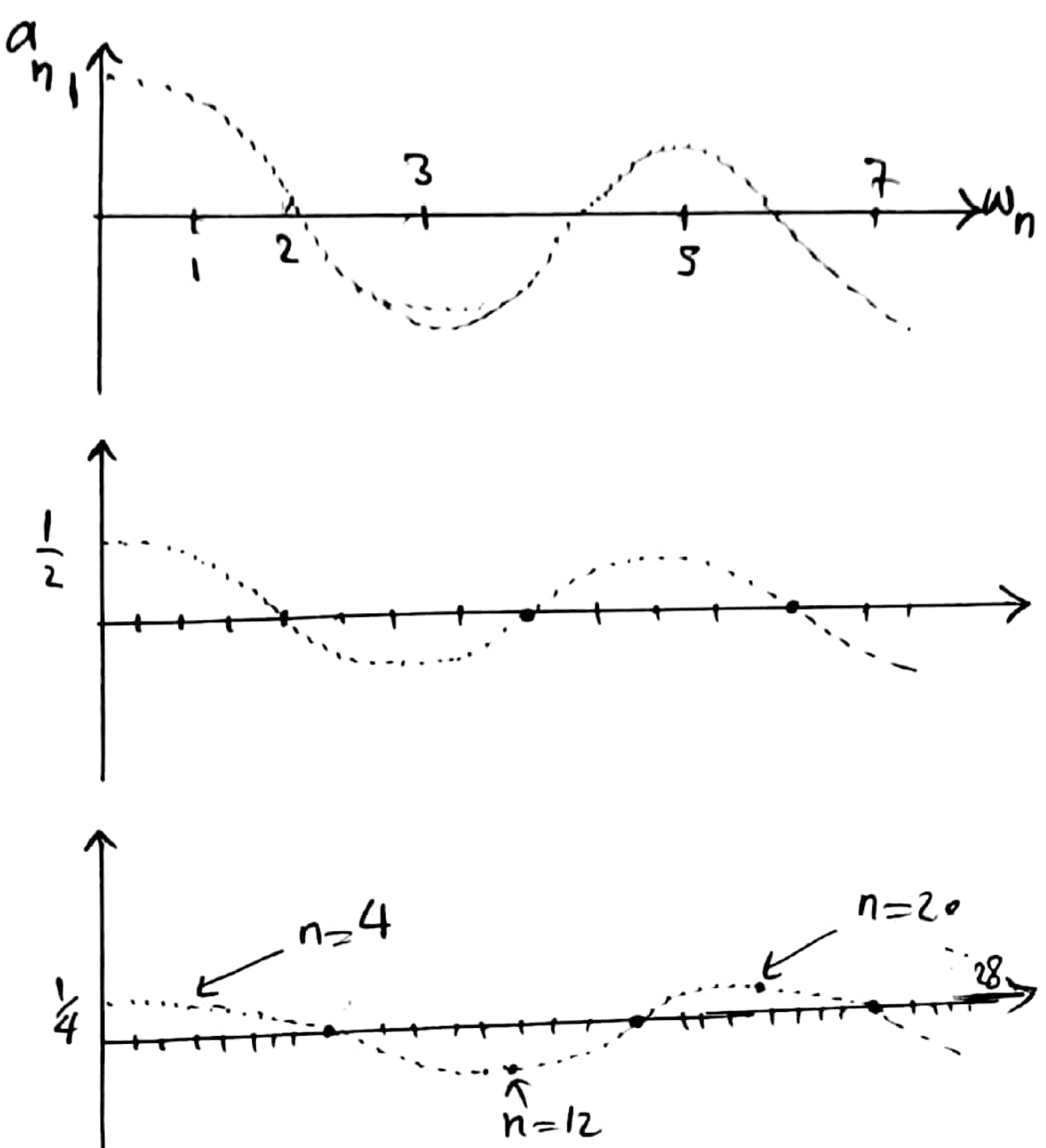
که در آن

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f_l(x)\,dx = \frac{2}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_l(x) \cos \frac{n\pi}{l} x\,dx = \frac{2}{l} \, \frac{\sin \frac{n\pi}{l}}{\frac{n\pi}{l}} \quad (1)$$

دنباله ضرایب فوق را طیف دامنه f_l می‌نامند زیرا $|a_n|$ ماکزیمم دامنه موج $a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$ است. حال نمودار طیف $f_l(x)$ یعنی نمودار ضریب عمومی یا دامنه a_n را به صورت تابعی از فرکانس دایره‌ای $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ rad/s به ازای lهای مختلف رسم می‌کنیم. با رسم نمودارها، بهتر می‌توان رفتار a_n وقتی $l \to \infty$ را بررسی کرد.

27



همان طور که ملاحظه می‌شود با افزایش l، دامنه بیشتر روی محور w_n متمرکز می‌شود.

لذا وقتی $l \to \infty$ ($\Delta w = \frac{\pi}{l} \to 0$)، فرکانس جملات موجود در (1)، یعنی w_n، به هم نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود در حالی که ضرایب به صفر میل می‌کنند. بنابراین این ایده مطرح می‌شود که اگر این سری را به صورت تابعی از l در نظر بگیریم در واقع مجموعی از بی‌نهایت کوچک‌هاست که حد آن یک انتگرال است.

صورت کلی سری فوریه تابع متناوب دلخواه $f_l(x)$ با دوره تناوب $2l$ به شکل زیر است

$$f_l(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x \right),$$

که در آن $w_n = \frac{n\pi}{l}$، با توجه به فرمول‌های اویلر برای a_n و b_n داریم

$$f_l(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f_l(v)\,dv + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\cos w_n x \int_{-l}^{l} f_l(v) \cos w_n v\,dv$$

$$+ \sin w_n x \int_{-l}^{l} f_l(v) \sin w_n v\,dv \Big]$$

فرض کنید f به طور مطلق انتگرال پذیر باشد، یعنی؛

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0|f(x)|dx+\lim_{a\to\infty}\int_0^a|f(x)|dx<\infty$$

در این صورت داریم

$$\lim_{l\to\infty}|a_0|=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\left|\int_{-l}^{l}f(x)dx\right|\leqslant\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|f(x)|dx=\lim_{l\to\infty}\frac{M}{l}=0$$

بنابراین

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}f_l(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\omega_n x\int_{-l}^{l}f_l(v)\cos\omega_n v\,dv\right.$$
$$\left.+\sin\omega_n x\int_{-l}^{l}f_l(v)\sin\omega_n v\,dv\right],$$

از طرفی داریم

$$\Delta\omega=\omega_{n+1}-\omega_n=\frac{\pi}{l}\Rightarrow\frac{1}{l}=\frac{\Delta\omega}{\pi}$$

لذا

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\omega_n x\int_{-l}^{l}f_l(v)\cos\omega_n v\,dv+\sin\omega_n x\int_{-l}^{l}f_l(v)\sin\omega_n v\,dv\right]\Delta\omega$$

عبارت داخل کروشه تابعی از ω_n و x بوده و مجموع فوق یک مجموع انتگرال است که آن را با توجه به تغییرات ω می‌توان بصورت زیر نوشت

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\cos\omega x\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v\,dv+\sin\omega x\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v\,dv\right]d\omega,\qquad(1)$$

فرض کنید

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos\omega v\,dv,\qquad(2)$$

و

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin\omega v\,dv,\qquad(3)$$

در این صورت

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega,\qquad(4)$$

که به نمایش انتگرال فوریه تابع $f(x)$ معروف است. توابع $A(\omega)$، $B(\omega)$ را تبدیلات فوریه تابع $f(x)$ نامند.

شرایط کافی برای وجود انتگرال فوریه را می‌توان در قضیه زیر خلاصه کرد

قضیه. فرض کنید f در هر زیر بازه متناهی قطعه قطعه پیوسته بوده و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست باشد. همچنین فرض کنید f به طور مطلق انتگرال پذیر باشد. در این صورت، f را می‌توان با یک انتگرال فوریه به شکل (1) نمایش داد که در آن $A(w)$ و $B(w)$ با (2) و (3) مشخص می‌شوند. علاوه بر این، انتگرال فوریه تابع $f(x)$ در نقطه x به میانگین حد چپ و راست تابع در این نقطه همگراست، یعنی،

$$\int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\,dw = \frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right]$$

مثال 23. تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>\pi\\ 0, & x<\pi\end{cases}$ دارای انتگرال فوریه نیست زیرا $\int_\pi^\infty |\sin x|\,dx$ نامحدود است.

مثال 24. انتگرال فوریه توابع زیر را بیابید.

(i) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

(ii) $f(x)=\begin{cases}x-1, & 0<x<1\\ 0, & \text{o.w}\end{cases}$

صورت مختلط انتگرال فوریه

با جایگزینی

$$\sin wx = \frac{e^{iwx}-e^{-iwx}}{2i}, \qquad \cos wx = \frac{e^{iwx}+e^{-iwx}}{2}$$

در انتگرال فوریه (4) داریم

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[\frac{A(w)-iB(w)}{2}e^{iwx}+\frac{A(w)+iB(w)}{2}e^{-iwx}\right]dw,$$

فرض کنید

$$C(w)=\frac{A(w)-iB(w)}{2}, \quad D(w)=\frac{A(w)+iB(w)}{2},$$

در این صورت داریم

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left(C(w)e^{iwx}+D(w)e^{-iwx}\right)dw, \qquad (5)$$

که در آن

$$C(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-iwv}\,dv, \qquad (6)$$

و

$$D(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{iwv}\,dv, \qquad (7)$$

روابط (7) - (5) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(w)e^{iwx}\,dw, \qquad (8)$$

که در آن $C(w)$ با (6) مشخص می‌شود.

عبارت (8) نمایش معتبری از تابع غیرمتناوب $f(x)$ است هرگاه

(i) در هر بازه متناهی، $f(x)$ در شرایط دیریکله صدق کند.

(ii) f به طور مطلق انتگرال پذیر باشد.

مثال 25. صورت مختلط انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\pi\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$ را بیابید و به کمک آن انتگرال فوریه آن را به صورت حقیقی معین کنید.

انتگرال‌های فوریه کسینوسی و سینوسی

اگر $f(x)$ تابعی باشد که در بازه $(0,\infty)$ تعریف شده باشد و در این بازه پیوسته تکه‌ای و به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد آن‌گاه با گسترش f به صورت زوج یا فرد می‌توان بسط انتگرال فوریه کسینوسی یا سینوسی را بدست آورد.

$f(x)$ به صورت زوج بسط داده شود

$$\Rightarrow \begin{cases} B(\omega)=0 \\ A(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(v)\cos \omega v \, dv \end{cases} \qquad (9)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty} A(\omega)\cos \omega x \, d\omega \qquad (10)$$

$f(x)$ به صورت فرد بسط داده شود

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\omega)=0 \\ B(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(v)\sin \omega v \, dv \end{cases} \qquad (11)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty} B(\omega)\sin \omega x \, d\omega \qquad (12)$$

در بعضی از مسائل، تابع $f(x)$ فقط روی $(0,\infty)$ تعریف شده است. مشابه سری فوریه در اینجا نیز با استفاده از نمایش انتگرال فوریه می‌توان تابع f را به دو شکل مختلف توسعه داد. در این حالت، دو تبدیل فوریه $A(w)$ و $B(w)$ با استفاده از روابط (9) و (11) برای تابع f تعریف می‌شوند، روابط (10) و (12) نشان می‌دهند چگونه می‌توان تابع $f(x)$ را از روی تبدیل $A(w)$ یا $B(w)$ بازسازی کرد. به همین دلیل، این روابط را تبدیلات وارون فوریه می‌نامند.

برای آنکه تبدیلات $A(w)$ و $B(w)$ و وارون آنها مشابه هم باشند، ضریب $\frac{2}{\pi}$ در روابط (9) و (11) را با $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ عوض کرده و در روابط (10) و (12) اضافه می‌کنیم.

با این تغییر تبدیل فوریه سینوسی تابع $f(x)$ که در $(0,\infty)$ تعریف شده است با رابطه زیر مشخص می‌شود

$$\mathcal{F}_s(f) = F_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \sin(wv)\, dv$$

تبدیل وارون آن نیز به صورت زیر است

$$\mathcal{F}_s^{-1}(f) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(w) \sin(wx)\, dw$$

به طور مشابه، تبدیل فوریه کسینوسی تابع f و تبدیل وارون آن به ترتیب عبارتند از

$$\mathcal{F}_c(f) = F_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \cos wv\, dv$$

$$\mathcal{F}_c^{-1}(f) = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(w) \cos(wx)\, dw$$

قضیه. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و وقتی $x \to \infty$، $f(x)$ صفر شود آنگاه

$$\mathcal{F}_s(f') = -w \mathcal{F}_c(f),$$

$$\mathcal{F}_c(f') = w \mathcal{F}_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0).$$

نتیجه. اگر وقتی $x \to \infty$، تابع $f(x)$ و مشتق آن به صفر میل کنند، آنگاه

$$\mathcal{F}_s(f'') = -w^2 \mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, w f(0),$$

$$\mathcal{F}_c(f'') = -w^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0),$$

مثال 26. بسط انتگرال فوریه کسینوسی و سینوسی تابع $f(x)=e^{-x}$ ، $x>0$ را بیابید.

مثال 27. مقدار $f(w)$ را از معادله انتگرالی زیر بدست آورید.

$$\int_0^\infty f(w)\sin wx\,dw=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi,\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

مثال 28. با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع زیر مقدار انتگرال های داده شده را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<a\\ 0, & x>a\end{cases}$$

الف) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

ب) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x}\sin x\,dx$

ج) $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx$

مثال 29. اگر داشته باشیم

$$\int_0^\infty f(x)\cos xt\,dx=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi,\\ 0, & t>\pi,\end{cases}$$

حاصل $\int_0^\infty [f(x)]^2dx$ را بدست آورید.

مثال 30. تبدیل فوریه کسینوسی تابع $f(x)=e^{-ax}$, $a>0$ را بیابید.

8.1 تبدیل فوریه

در این بخش، صورت دیگری از تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را که در سرتاسر $(-\infty, +\infty)$ تعریف شده است، بدست می‌آوریم. از آنجا که این فرم تبدیل فوریه، رایج‌ترین فرم آن است از آن به تبدیل فوریه یاد می‌شود.
همان طور که در بخش قبل ملاحظه شد، صورت مختلط انتگرال فوریه به صورت زیر است

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwx}\, dw \qquad (1)$$

که در آن

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-iwv}\, dv \qquad (2)$$

در روابط فوق $F(w)$ را تبدیل فوریه $f(x)$ می‌نامند و به صورت‌های زیر نشان می‌دهند

$$\mathcal{F}(f(x))=F(w)$$

$$f(x)\xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$

و $f(x)$ را تبدیل فوریه وارون می‌نامند و به یکی از صورت‌های زیر نشان می‌دهند

$$F(w)\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(x)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(F(w))=f(x) \qquad (\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f(x))$$

مثال 31. تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-ax^2}$ ، $a>0$ را بدست آورید.

نکته: اگر f تابعی زوج باشد آنگاه $\mathcal{F}(f)=\mathcal{F}_c(f)$ و اگر f تابعی فرد باشد آنگاه $\mathcal{F}(f)=\mathcal{F}_s(f)$

در این قسمت برخی از ویژگی‌های تبدیل فوریه بیان می‌شوند.

۱- خطی بودن

تبدیل فوریه یک عملگر خطی است، یعنی به ازای مقادیر ثابت a و b داریم

$$\mathcal{F}(af+bg)=a\mathcal{F}(f)+b\mathcal{F}(g)$$

برهان.

$$\mathcal{F}(af+bg)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(af(v)+bg(v))e^{-iwv}\,dv$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-iwv}\,dv+\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(v)e^{-iwv}\,dv$$

$$=a\mathcal{F}(f)+b\mathcal{F}(g).$$

2- انتقال

برای هر مقدار ثابت حقیقی c تبدیل فوریه تابع $f(x-c)$ به صورت زیر است

$$\mathcal{F}(f(x-c))=e^{-iwc}\mathcal{F}(f)$$

برهان.

$$\mathcal{F}(f(x-c))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v-c)e^{-iwv}\,dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iw(c+u)}\,du$$

$$=\frac{e^{-iwc}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iwu}\,du$$

$$=e^{-iwc}\mathcal{F}(f).$$

3. تغییر مقیاس

برای هر مقدار ثابت حقیقی $c\neq 0$، تبدیل فوریه $f(cx)$ به صورت زیر است

$$f(x)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(w)$$

$$f(cx)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{|c|}F\left(\frac{w}{c}\right)$$

4. تبدیل فوریه مشتق

اگر تابع f پیوسته و قطعه قطعه هموار باشد، به علاوه f و f' به طور مطلق انتگرال پذیر بوده و وقتی $|x|\to\infty$، $f(x)$ به سمت صفر میل کند، آنگاه

$$\mathcal{F}(f') = i\omega\, \mathcal{F}(f).$$

برهان.

$$\mathcal{F}(f') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(v)\, e^{-i\omega v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(v)\, e^{-i\omega v}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-i\omega v}\, dv$$

$$= i\omega\, \mathcal{F}(f).$$

فرض کنید f و $(n-1)$ مشتق اول آن پیوسته باشند، همچنین فرض کنید مشتق nام f قطعه قطعه پیوسته باشد. در این صورت به شرط آنکه f و مشتقات آن به طور مطلق انتگرال پذیر باشند

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (i\omega)^n\, \mathcal{F}(f).$$

5.

$$x^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^n F^{(n)}(\omega)$$

6. کانولوشن (پیچش)

کانولوشن دو تابع f و g که در سرتاسر $\mathbb{R}$ تعریف شده باشند، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, g(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(x-u)\, du$$

کانولوشن دو تابع دارای ویژگی های زیر است

الف) جابجایی

$$f*g=g*f$$

ب) شرکت پذیری

$$f*(g*h)=(f*g)*h$$

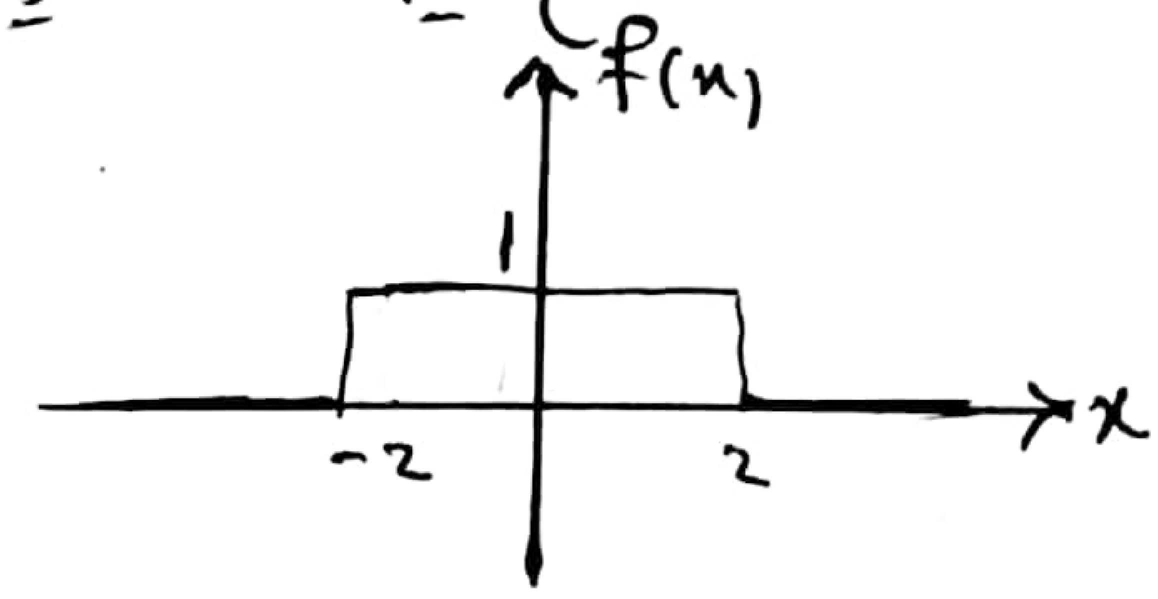
ج) توزیع پذیری

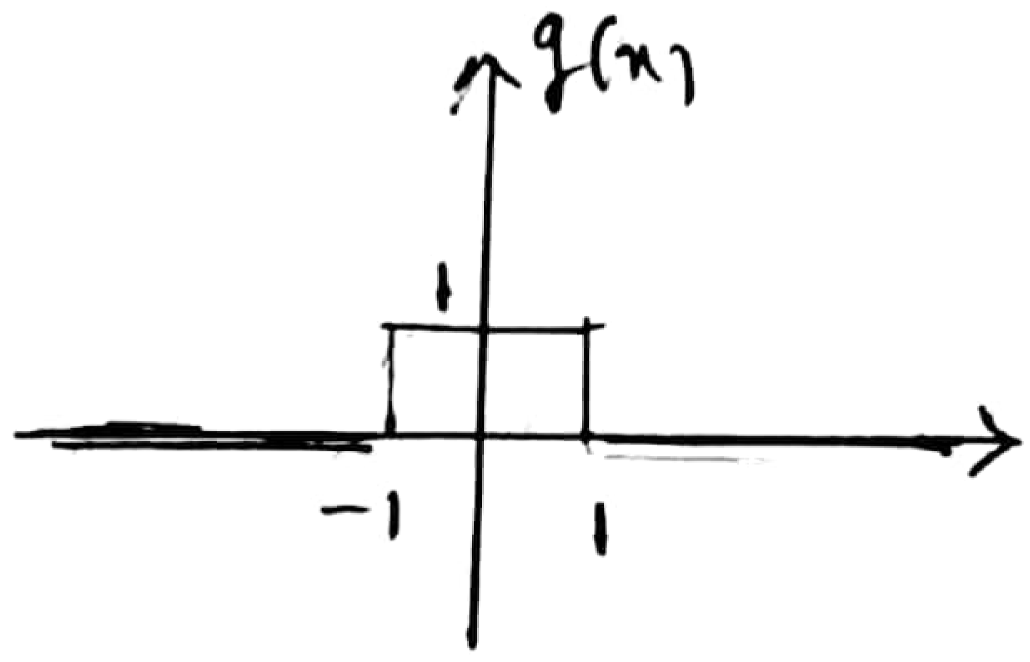
$$f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$$

ت) مشتق

$$(f*g)'=f'*g+f*g'$$

مثال 32. کانولوشن دو تابع زیر را بدست آورید.





قضیه پیچش

فرض کنید f و g به طور تکه‌ای پیوسته، کراندار و به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت تبدیل فوریه کانولوشن $f*g$ برابر حاصل ضرب تبدیل فوریه $F(\omega)$ و $G(\omega)$ است، یعنی

$$\mathcal{F}(f*g)=\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)=F(\omega)G(\omega)$$

اثبات.

$$\mathcal{F}(f*g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(v)e^{-i\omega v}\,dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(v-\xi)g(\xi)e^{-i\omega v}\,d\xi\,dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(v-\xi)e^{-i\omega v}\,dv\right)g(\xi)\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega(u+\xi)}\,du\right)g(\xi)\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega\xi}g(\xi)\,d\xi$$

$$=F(\omega)G(\omega).$$

نتیجه.

$$fg\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi F(\omega)*G(\omega)$$

مثال 33. جواب معادله انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u)\,du}{(x-u)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2}, \quad 0<a<b$$

7. خاصیت دوگانی (تقارن) تبدیل فوریه

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$

$$F(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-w)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwx}\,dw=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{iyx}\,dy$$

$$\Rightarrow\quad f(-w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\, e^{iy(-w)}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\, e^{-iwv}\,dv$$

$$=\mathcal{F}\{F(v)\}$$

مثال 34. تبدیل فوریه تابع $\frac{1}{1+x^2}$ برابر $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|w|}$ است لذا

$$\mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|x|}\right)=\frac{1}{1+(-w)^2}=\frac{1}{1+w^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+w^2}.$$

8. رابطه پارسوال

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(w)|^2dw$$

9. اگر $f(x)$ تابعی حقیقی باشد آنگاه

الف) قسمت حقیقی $F(w)$ همواره زوج و قسمت موهومی آن همواره فرد است.

ب) $F(w)$ زوج و حقیقی است $\Longrightarrow$ $f(x)$ زوج باشد

ج) $F(w)$ فرد و موهومی است $\Rightarrow$ $f(x)$ فرد باشد

به بیان دیگر

$$f(x) = \underbrace{f_e(x)}_{\text{زوج}} + \underbrace{f_o(x)}_{\text{فرد}}$$

$$F_e(w) = Re\,(F(w)), \quad F_o(w) = j\,Im\,(F(w))$$

مثال 35. تبدیل فوریه یک پالس مستطیلی واحد بین $-a<x<a$ ، $\frac{2\sin(aw)}{w}$ است.
نشان دهید $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(aw)}{w^2}\,dw = \pi a$

برای مقدار ثابت $a \geq 0$ ، تابع $u_a(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ 1, & x \geq a \end{cases}$ را تابع پله‌ای می‌نامند. با توجه به تعریف فوق، تابع u_a به طور مطلق انتگرال‌پذیر نیست و برای بدست آوردن تبدیل فوریه آن به انتگرال زیر می‌رسیم که همگرا نیست

$$\mathcal{F}(u_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(x)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{+\infty} e^{-iwx}\, dx$$

برای رفع این مشکل، تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$u_a(x)\, e^{-\beta x} = \begin{cases} 0, & x<a \\ e^{-\beta x}, & x \geq a \end{cases}$$

وقتی $\beta \to 0$، این تابع به تابع پله‌ای میل می‌کند. بنابراین تبدیل فوریه تابع پله‌ای را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد

$$\mathcal{F}(u_a(x)) = \lim_{\beta \to 0} \mathcal{F}\left(u_a(x)\, e^{-\beta x}\right)$$

$$= \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(x)\, e^{-\beta x} e^{-i\omega x}\, dx$$

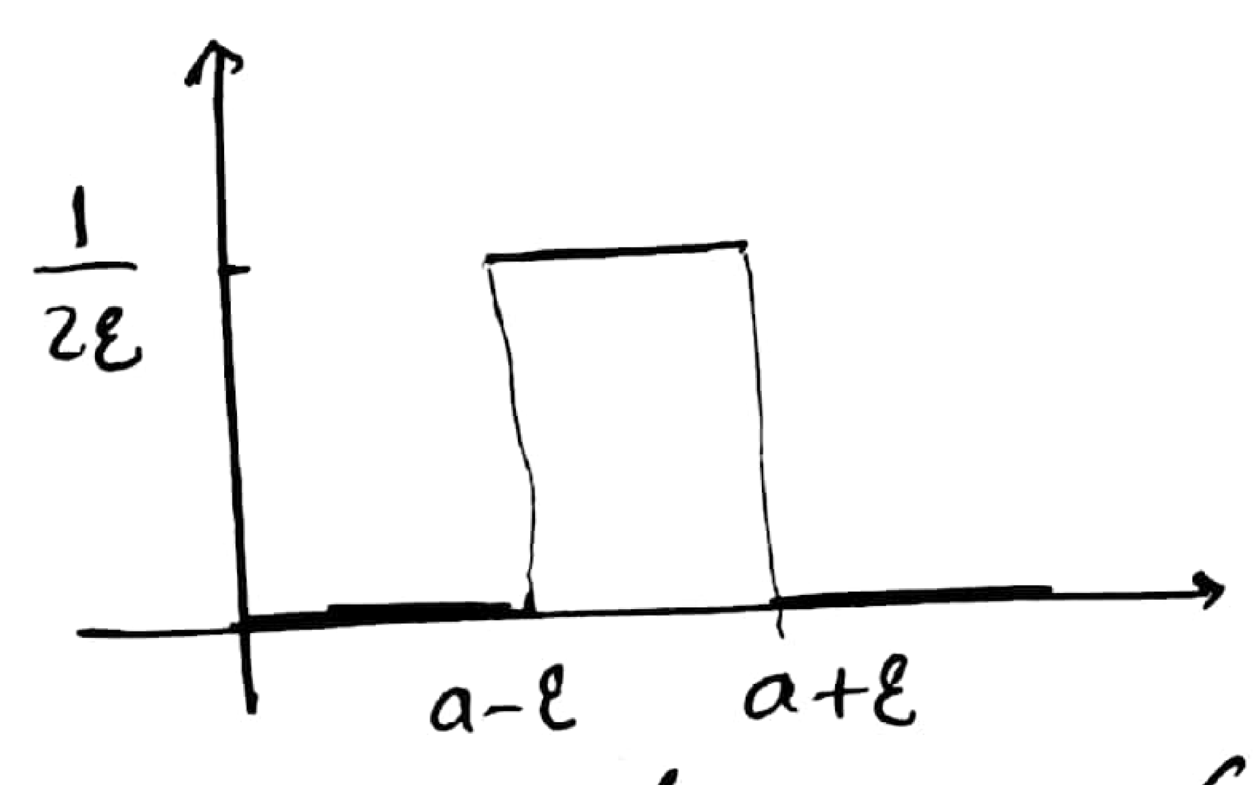
$$= \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{+\infty} e^{-(\beta + i\omega)x}\, dx = \frac{i e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}\, \omega}$$

به خصوص در حالت $a=0$،

$$\mathcal{F}(u_0(x)) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\, \omega},$$

آخرین مطلب این بخش به تبدیل فوریه تابع ضربه اختصاص دارد. تابع ضربه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x-a| < \varepsilon \\ 0, & |x-a| > \varepsilon \end{cases}$$



این تابع بیانگر نیروی بزرگی است که در فاصله زمانی کوتاه وارد می‌شود. تبدیل فوریه این تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mathcal{F}(P_\varepsilon(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(v)\, e^{-i\omega v}\, dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\, e^{-i\omega v}\, dv$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-i\omega a}}{i\omega} \left(e^{-i\omega\varepsilon} - e^{+i\omega\varepsilon}\right) = \frac{e^{-i\omega a}}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{\sin(\omega\varepsilon)}{\omega\varepsilon}$$

همچنین برای توابع ضربه داریم

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon(x)=0,\ x\neq a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(x)\,dx=1$$

در مسایل فیزیکی، حد تابع ضربه را وقتی $\varepsilon\to 0$، با نماد $\delta(x-a)$ نشان می‌دهند و آن را تابع دلتای دیراک می‌نامند. هرچند به کاربردن لفظ تابع برای آن خالی از اغماض نیست ولی می‌توان آن را به عنوان یک تابع تعمیم یافته به کار برد که به صورت یک تابعک خطی روی $C_0^\infty(\mathbb{R})$ عمل می‌کند و خواص زیر را دارد

$$\delta(x-a)=0,\quad x\neq a,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,dx=1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)f(x)\,dx=f(a).$$

تبدیل فوریه تابع δ را به صورت حد تبدیل فوریه توابع $P_\varepsilon(x)$ تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}(\delta(x-a))=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}(P_\varepsilon(x))=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-iwa}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin(w\varepsilon)}{w\varepsilon}$$

$$=\frac{e^{-iwa}}{\sqrt{2\pi}}.$$

۱۰. تبدیل فوریه انتگرال

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)$$

$$\int f(x)\,dx \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{iw}F(w)+\pi\,\delta(w)\,F(0)$$

که در آن $\delta(x)$، دلتای دیراک است.

فصل دوم معادلات دیفرانسیل جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[1] در مسایل فیزیک، مهندسی و سایر علوم که شامل توابعی هستند که این توابع بر یک یا چند متغیر بستگی دارند، با به کارگیری قوانین حاکم، پدید می‌آیند. تعداد زیادی از مسایل مدل‌سازی مکانیک سیالات و جامدات (انتقال حرارت، دینامیک و الاستیسیته)، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کوانتوم بر یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر می‌شود. از معروف‌ترین آن‌ها، می‌توان به معادله موج، معادله انتقال حرارت، معادله لاپلاس، معادله پواسن و معادله شرودینگر اشاره کرد. در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، متغیرهای مستقل می‌توانند زمان، مکان و یا یک یا چند مولفه فضایی باشند.

1.2 مفاهیم اولیه

معادله دیفرانسیل

معادله‌ای است که ارتباط بین یک تابع و مشتقات آن تابع نسبت به متغیرهای موجود و خود متغیر را نشان می‌دهد.

اگر تابع مورد بحث فقط از یک متغیر تبعیت کند معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل معمولی[2] (ODE) و اگر تابع مورد بحث از چند متغیر تبعیت کند معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) می‌نامند. به عبارت دیگر، معادله‌ای که شامل یک یا چند مشتق جزئی از تابع (مجهول) نسبت به دو یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامند.

مرتبه PDE

مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله را مرتبه PDE می‌نامند.

$x u_x - y u_y = \sin xy$, 1 مرتبه PDE

$u_{xy} + u_x u_{yy} + u_x^4 + 4u^2 = e^{x+y}$, 2 مرتبه PDE

$u_{xx} + 2u_x + u = \sin xy$, 2 مرتبه ODE

---

1 Partial Differential Equations (PDE)

2 Ordinary Differential Equations

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F(x,y,\dots,u,u_x,u_y,\dots,u_{xx},u_{yy},\dots)=0, \qquad (1-2)$$

که در آن F تابعی از متغیرهای مستقل x، y، ... و تابع مجهول u و تعداد متناهی از مشتقات u است.

معادله دیفرانسیل جزئی (1-2) را خطی[1] گویند هرگاه تابع F نسبت به هر یک از متغیرهای $u, u_x, u_y, \dots$ خطی باشد. به عبارت دیگر این معادله را بتوان به صورتی نوشت که یک طرف از تساوی از ترکیبی خطی از تابع مجهول و مشتقات آن با ضرایبی از توابعی از متغیرهای مستقل تشکیل شده باشد و طرف دوم معادله فقط تابعی از متغیرهای مستقل باشد.
PDE را شبه‌خطی[2] گویند هرگاه نسبت به بالاترین مرتبه مشتقی که در معادله ظاهر می‌شود خطی باشد. به عبارت دیگر، تمامی توان‌های مشتقات u یک باشد.
PDE را در غیر این دو حالت، غیرخطی[3] می‌نامند.

$u_x + xu_y = u + 2,$ PDE مرتبه 1 خطی

$u_x + uu_y = u,$ PDE مرتبه 1 شبه‌خطی

$u_x u_{xx} + xuu_y = \sin y,$ PDE مرتبه 2 شبه‌خطی

$u_y^3 - u_x + u = 0,$ PDE مرتبه 1 غیرخطی

PDE را همگن[4] گویند هرگاه تمامی جملات موجود در معادله شامل متغیر وابسته (تابع مجهول) یا یکی از مشتقات جزئی آن باشند. در غیر این صورت، آن را ناهمگن[5] می‌نامند.

$y^2 u_x + x u_{yx} + y = 0$ PDE مرتبه 2 شبه‌خطی غیرهمگن

---

1 linear
2 quasi-linear
3 nonlinear
4 homogeneous
5 nonhomogeneous

فرض کنید A، B، C و G در ناحیه‌ای مانند Ω از صفحه xy دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته بوده و حداقل یکی از ضرایب A و B بر Ω ناصفر باشد. در این صورت شکل کلی یک PDE مرتبه 1 خطی را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت

$$A(x,y)\,u_x + B(x,y)\,u_y + C(x,y)\,u = G(x,y) \qquad (2-2)$$

به طور مشابه، شکل کلی یک PDE مرتبه 2 خطی در ناحیه‌ای مانند Ω را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت

$$A(x,y)\,u_{xx} + B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} + D(x,y)\,u_x + E(x,y)\,u_y + F(x,y)\,u = G(x,y), \qquad (3-2)$$

که در آن A، B، C، D، E و F بر ناحیه Ω از صفحه xy به طور پیوسته دو بار مشتق پذیر هستند.

اگر در معادلات (2-2) و (3-2)، $G(x,y)\equiv 0$، معادله را همگن گویند، در غیر این صورت غیر همگن می‌نامند.

معادلات دیفرانسیل جزئی خطی مشهور و کلاسیک عبارتند از

1- معادله انتقال حرارت یک بعدی

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad (c \text{ یک ثابت است})$$

2- معادله موج یک بعدی (تار مرتعش)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad (c \text{ یک ثابت است})$$

3- معادله انتقال حرارت دو بعدی

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy}),$$

4- معادله موج دو بعدی

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

5- معادله لاپلاس دو بعدی

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

6- معادله لاپلاس دو بعدی در مختصات قطبی

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0,$$

7- معادله پواسن

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y),$$

8- معادله انتقال حرارت سه بعدی

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (c \text{ یک ثابت است})$$

9- معادله موج سه بعدی

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad (c \text{ یک ثابت است})$$

10- معادله تلگراف

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u_t + \beta u, \quad (\alpha, \beta \text{ ثابت هستند})$$

متغیر t در معادلات دیفرانسیل جزئی به عنوان متغیر زمان ظاهر می‌گردد و همواره نامنفی است. همچنین متغیرهای x، y و z به عنوان متغیرهای مکان ظاهر می‌گردد و (x,y,z) یک نقطه از فضاست. در حالت کلی، u نیز تابعی از x، y، z و t است.

برای حل ODE معمولاً به دنبال جواب عمومی آن هستیم اما در مورد PDE، تعیین جواب عمومی همواره امکان پذیر نیست. چنانچه چنین جوابهایی موجود باشد و معادله از مرتبه m باشد در این صورت این گونه جوابها شامل m تابع اختیاری هستند و انتخاب جواب مطلوب از این جواب عمومی بسیار مشکل و در اکثر مسایل غیرممکن است. در واقع تعیین جواب عمومی PDE در صورتی مقدور است که بتوان با تغییر تابع مجهول، آن را به یک ODE تبدیل کرد و حل ODE مقدور باشد.

مثال ۱. $u_{xyx} + u_x = e^x \sin y$

جواب یک PDE در ناحیه‌ای مانند Ω از فضای متغیرهای مستقل، تابعی است که در ناحیه‌ای شامل Ω، تمام مشتقات جزئی موجود در معادله را دارا بوده و در همه نقاط Ω در معادله صدق کند. اغلب نیاز داریم تابع مورد نظر بر مرز Ω پیوسته و دارای مشتقات جزئی در درون Ω بوده و در معادله صدق کند.

منظور از حل یک PDE یافتن تابع‌هاست ضمنی یا صریح بین متغیرهای وابسته و متغیرهای مستقل که در PDE صدق کنند. در حالت کلی این جواب شامل توابع دلخواه یا پارامترهای دلخواه است.

همچنین، در حالت کلی، تعداد جواب‌های یک PDE زیاد است. به عنوان مثال، هر یک از توابع $u = x^2 - y^2$ ، $u = e^x \cos y$ و یا $u = \ln(x^2+y^2)$ که تفاوت زیادی با هم دارند، جواب‌های معادله لاپلاس دوبعدی هستند.

همان‌طور که از مثال‌های فوق مشاهده می‌گردد، یک PDE که یک مدل فیزیکی را بیان می‌کند، معمولاً بی‌نهایت جواب دارد. برای انتخاب جوابی که نمایش دهنده جواب فیزیکی مساله باشد، باید شرایط دیگر جواب را از مسالهٔ فیزیکی استخراج و همراه با معادله منظور کنیم. این نوع شرایط را شرایط تکمیلی[1] گویند که بر دو نوع است:

نوع اول: تابع مجهول باید برای $t>0$ تعریف شود. در این صورت، از روی شرایط فیزیکی، تابع مجهول و مشتقات آن تا مرتبه $m-1$ در $t=0$ داده شده است. این گونه شرایط را شرایط اولیه[2] گویند.

نوع دوم: تابع مجهول باید روی میدانی مانند Ω از فضا تعریف شود. در این صورت، مقدار این تابع یا مشتق جهت‌دار آن و یا ترکیبی از این دو در روی مرز Ω قابل تعیین است و همراه با معادله داده می‌شود. این گونه شرایط را شرایط مرزی[3] گویند.

اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار تابع مجهول بر روی مرز داده شده باشد آن را شرایط مرزی دیریکله[4] گویند. اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مشتق تابع مجهول در جهت بردار نرمال بر روی مرز میدان مکان داده شده باشد، آن را شرایط مرزی نیومن[5] نامند. همچنین اگر شرایط مرزی در قسمت‌هایی از مرز بر حسب تابع مجهول و در قسمت‌های دیگر بر حسب مشتق در جهت نرمال داده شده باشد، آن را شرط مرزی روبین[6] گویند. اگر میدان مکان یک بازه متناهی باشد و تفاضل مقدار تابع و مشتق آن در دو طرف بازه، مشخص باشد، شرط مرزی تناوبی[7] نامیده می‌شود.

---

1 Supplementary conditions
2 Initial conditions
3 Boundary conditions
4 Dirichlet
5 Neumann
6 Robin
7 Periodic

در ادامه چند خاصیت از ODE را که برای PDE نیز برقرار است، بیان می‌شود.

خاصیت 1. اگر $u_1, \dots, u_n$ جواب‌های یک PDE خطی همگن و $c_1, c_2, \dots, c_n$ مقادیری ثابت باشند آنگاه $\sum_{1}^{n} c_k u_k$ نیز یک جواب این معادله است.

خاصیت 2. اگر u_p یک جواب PDE خطی غیرهمگن

$$\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(t,x,y,z)\, D^\alpha u = f(t,x,y,z) \qquad (4-2)$$

باشد که در آن $\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ و $\alpha_j = 0,1,2,\dots$، $D=(D_0,D_1,D_2,D_3)$، $D^0u=u$،

$A_\alpha(t,x,y,z)$، $|\alpha| = \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$، $D^\alpha u = D_0^{\alpha_0} D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3} u = \frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial z^{\alpha_3}} u$

یک تابع مشخص است. همچنین فرض کنید u_c یک جواب معادله همگن وابسته به آن باشد آنگاه u_c+u_p یک جواب دیگر معادله (4-2) است.

خاصیت 3. اگر u_{pk} یک جواب معادله (4-2) به ازای $f=f_k$، $k=1,2,\dots,n$ باشد آنگاه $\sum_{k=1}^{n} u_{pk}$ یک جواب معادله (4-2) به ازای $f=\sum_{k=1}^{n} f_k$ است.

اگر در خاصیت 1 یا 3 مقدار n برابر بی‌نهایت گردد، این مطالب برقرار نخواهد بود، حتی وقتی سری‌های مربوط همگرا باشند. اما در حالت همگرایی یکنواخت، این دو خاصیت برای $n=\infty$ همچنان برقرار است. به دلیل برقرار نبودن خاصیت‌های فوق برای $n=\infty$، حل معادلات دیفرانسیل جزئی بیش از یک قرن مسکوت ماند تا اینکه منجر به پیدایش سری فوریه گردید.

حل PDE در حالت خاص با کمک انتگرال گیری

ممکن است بنابه وضعیت خاص معادله، انتگرال گیری های متوالی بتواند جواب مسأله را نتیجه دهد. این حالت زمانی اتفاق می افتد که فقط یک جمله مشتق وجود داشته باشد و متغیر وابسته نیز موجود نباشد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + y \Rightarrow u = \frac{x^3}{3} + xy + \varphi(y)$$

مثال 2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{x}{2}\cos y \\ u(x,0) = 1-x \\ u(0,y) = 1+y \end{cases}$$

2.2 روش لاگرانژ برای حل PDE مرتبه اول شبه خطی

PDE مرتبه اول شبه خطی

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \quad (15-2)$$

نسبت به دو متغیر مستقل x و y و متغیر وابسته z را درنظر بگیرید. روشی که برای حل این معادلات به کار می‌رود به روش لاگرانژ معروف است که در قضیه زیر بیان می‌شود

قضیه. اگر $u(x,y,z)$ و $v(x,y,z)$ دو جواب مستقل خطی دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

باشند آنگاه $\varphi(u,v)=0$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$ و یا $u=\varphi(v)$ یک جواب عمومی (15-2) است.

مثال 3. جواب عمومی معادله دیفرانسیل جزئی $x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=yz$ را بیابید.

مثال 4_ جواب عمومی PDE های زیر را بیابید

(i) $xz\,z_x + yz\,z_y = -(x^2+y^2)$

(ii) $(z^2 - 2yz - y^2)\,z_x + (xy + xz)\,z_y = xy - xz$

3.2 رده بندی معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی و یافتن شکل کانونیک آن‌ها

در هندسه تحلیلی مطالعه منحنی‌هایی که معادلات آن‌ها از درجه دوم نسبت به x و y هستند با تبدیل معادله به صورت نرمال، ساده‌تر انجام می‌شود. به کمک یک تبدیل خطی از متغیرهای x و y، معادله را می‌توان به صورت هذلولوی، سهمی یا بیضوی نسبت به متغیرهای جدید ξ و η تبدیل کرد. دستگاه مختصات $\xi\eta$، دستگاهی است که نسبت به آن منحنی ساده‌تر و طبیعی‌ترین نمایش جبری خود را داشته باشد. روشی مشابه را می‌توان در مطالعه PDEهای مرتبه دوم خطی بر کار برد.

معادله با مشتقات جزئی (3-2) را در نظر بگیرید که در آن تمامی ضرایب و تابع طرف دوم در میدان Ω پیوسته‌اند.

فرض کنید

$$\Delta = B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0)$$

در این صورت، PDE را در نقطه (x_0,y_0)، هذلولوی، سهموی یا بیضوی گوییم هرگاه Δ به ترتیب، مثبت، صفر یا منفی باشد. همچنین این معادله را روی Ω، هذلولوی، سهموی یا بیضوی گوییم اگر در هر نقطه Ω، هذلولوی، سهموی یا سهموی باشد.

برای یافتن تغییر متغیرهای لازم برای رسیدن به شکل کانونیک، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول درجه دوم

$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B(x,y)\frac{dy}{dx} + C(x,y) = 0 \qquad (6-2)$$

که به معادله مشخصه معروف است، را تشکیل می‌دهیم. هر جواب این معادله مشخصه، منحنی مشخصه نامیده می‌شود. با حل معادله مشخصه وقتی $A\neq 0$، داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \qquad (7-2)$$

در ادامه با استفاده از تغییر متغیرهای مستقل معادله (3-2) را ساده می‌کنیم. در این رابطه، منحنی‌های مشخصه نقش اساسی دارند. این مطلب به نوع معادله بستگی دارد. لذا حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت 1. معادله (3-2) هذلولوی است یا $\Delta>0$.

در این حالت با حل ODEهای مرتبه اول (7-2) داریم

(جواب‌های عمومی (7-2))

$$\varphi(x,y)=c_1, \quad \psi(x,y)=c_2,$$

متغیرهای مستقل ξ و η را به صورت زیر تعریف کنید

$$\xi=\varphi(x,y), \quad \eta=\psi(x,y),$$

معادله (3-2) را برحسب این متغیرهای جدید می‌نویسیم برای این منظور محاسبات زیر لازم است

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x, \quad u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y,$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},$$

$$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy},$$

با جایگذاری در معادله (3-2) داریم

$$A^*u_{\xi\xi}+B^*u_{\xi\eta}+C^*u_{\eta\eta}+D^*u_\xi+E^*u_\eta+F^*u=G^*$$

که در آن

$$A^*=A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2,$$

$$B^*=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y$$

$$C^*=A\eta_x^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2$$

$$D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y ,$$

$$E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y ,$$

$$F^* = F, \quad G^* = G ,$$

چون $\xi = \varphi(x,y)$، پس $\xi_x + \xi_y \dfrac{dy}{dx} = 0$ یا $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\xi_x}{\xi_y}$. لذا داریم

$$A^* = \xi_y^2 \left[A\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + B\frac{\xi_x}{\xi_y} + C \right] = \xi_y^2 \left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C \right] = 0,$$

به طور مشابه $C^* = 0$ و معادله (2-3) برحسب متغیرهای جدید ξ و η

به صورت زیر ظاهر می‌شود

$$B^* u_{\xi\eta} = H^* \Rightarrow u_{\xi\eta} = \frac{H^*}{B^*} = H_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad (8\text{-}2)$$

معادله (2-8) را شکل کانونیک نوع اول معادله هذلولوی گویند.

اگر متغیرهای مستقل جدید را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\alpha = \xi + \eta , \quad \beta = \xi - \eta$$

آنگاه

$$u_\xi = u_\alpha + u_\beta , \quad u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}$$

معادله (2-8) برحسب متغیرهای جدید α و β به صورت زیر در می‌آید

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad (9\text{-}2)$$

معادله (2-9) را شکل کانونیک نوع دوم معادله هذلولوی گویند.

تذکر: اگر $A\equiv 0$ و $C\neq 0$، معادله مشخصه به صورت

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-B\frac{dx}{dy}=0$$

در نظر می‌گیریم. اگر $A\equiv 0$ و $C\equiv 0$، معادله هذلولوی و به صورت کانونیک نوع اول هذلولوی است. در حالت $A\equiv 0$ و $C\neq 0$ منحنی‌های مشخصه به صورت

$$\varphi(x,y)=C_1\ ,\quad \psi(x,y)=x=C_2$$

در می‌آید. در این حالت متغیرهای جدید را به صورت $\xi=\varphi(x,y),\ \eta=x$ در نظر می‌گیریم.

حالت 2: معادله (2-3) سهموی است یا $\Delta=0$

در این صورت معادله مشخصه (2-7) به صورت $\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A}$ ظاهر می‌گردد.

پس فقط یک دسته منحنی مشخصه $\varphi(x,y)=C_1$ را داریم. متغیرهای جدید را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\xi=\varphi(x,y),\ \eta=x$$

برای η هر متغیر مستقل از ξ می‌توان انتخاب کرد. چنانچه A^* و B^* را محاسبه کنیم

$$A^*=A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=(\sqrt{A}\,\xi_x+\sqrt{C}\,\xi_y)^2=0,$$

$$B^*=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y$$

$$=2(\sqrt{A}\,\xi_x+\sqrt{C}\,\xi_y)(\sqrt{A}\,.\,\eta_x+\sqrt{C})=0$$

که در هر دو حالت از خاصیت سهموی بودن یعنی $B^2-4AC=0$ و تساوی $\sqrt{A}\,\xi_x+\sqrt{C}\,\xi_y=0$ استفاده شده است.

با قرار دادن این مقادیر و تقسیم بر C^* داریم

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \qquad (10-2)$$

معادله (2-10) را شکل کانونیک معادلات سهموی گویند.

تذکر. اگر در معادلات سهموی داشته باشیم $A \equiv 0$ آنگاه $B \equiv 0$ و $C \neq 0$ یعنی در این حالت، معادله بفرم کانونیک معادلات سهموی است.

حالت 3. معادله (2-3) بیضوی است یا $\Delta < 0$

در این حالت معادله مشخصه دارای جواب حقیقی نخواهد بود، یعنی

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

جواب عمومی این معادلات بصورت زیر است

$$\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) = C_1$$

و

$$\varphi(x,y) = \alpha(x,y) - i\beta(x,y) = C_2$$

اگر معادله (2-3) برحسب متغیرهای حقیقی $\alpha = \alpha(x,y)$ و $\beta = \beta(x,y)$ بازنویسی شود، داریم

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad (11-2)$$

معادله (2-11) را شکل کانونیک معادله بیضوی مینامند.

تذکر. معادله موج یک بعدی بر شکل کانونیک نوع دوم هذلولوی، معادله انتقال حرارت بر شکل کانونیک سهموی و معادله لاپلاس بر شکل کانونیک بیضوی است.

تذکر. معادله دیفرانسیل جزئی ممکن است در دامنه‌های متفاوت دارای شکل کانونیک متفاوت باشد. بعنوان مثال، معادله $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ در $x > 0$ بیضوی و در $x < 0$ هذلولوی است.

تذکر. مختصات (ξ,η) را مختصات مشخصه گویند.

تذکر. در حالتی که معادله (2-3) با ضرایب ثابت باشد از معادله مشخصه (2-6) داریم

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1 \;,\; \frac{dy}{dx}=\lambda_2 \;,$$

یا

$$\varphi(x,y)=y-\lambda_1 x=c_1 \;,\; \psi(x,y)=y-\lambda_2 x=c_2 ,$$

یعنی در این حالت تغییر متغیرهای $\xi=y-\lambda_1 x$ و $\eta=y-\lambda_2 x$ را داریم. لذا α، β خطی هستند.

مثال 5. نوع PDE زیر را مشخص کنید.

$$(1-x^2)z_{xx}-2xyz_{xy}+(1-y^2)z_{yy}+xz_x+3x^2yz_y-2z=0$$

مثال 6. نوع معادلات زیر را مشخص کرده و آن‌ها را به شکل کانونیک بنویسید.

(i) $4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+2u_x+u=xy,$

(ii) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+u_y=x^2+y^2,$

(iii) $u_{xx}+4x^2u_{yy}+u_y=x^2+y^2.$

4.2 حل معادلات دیفرانسیل جزئی همگن با ضرایب ثابت

PDE همگن مرتبه اول خطی زیر را در نظر بگیرید

$$a z_x + b z_y + c z = 0, \qquad (12-2)$$

که در آن a، b و c اعداد ثابت دلخواهی هستند.

$z_h = e^{mx+ny}$ را به عنوان جواب PDE فوق در نظر بگیرید. با توجه به اینکه m, n اعداد ثابت دلخواهی هستند z_h یک تابع دلخواه است (می‌توان به جای تعریف فوق، $z_h = \varphi(x, y)$ یا $z_h = \varphi(ay-bx)$ در نظر گرفت که در آن φ تابعی دلخواه است منتها در این صورت حجم محاسبات افزایش می‌یابد)

با جایگذاری z_h در (12-2) داریم

$$mae^{mx+ny} + nbe^{mx+ny} + ce^{mx+ny} = 0$$

$$\Rightarrow (ma+nb+c)\, e^{mx+ny} = 0$$

$$\Rightarrow ma+nb+c=0 \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-c-bn}{a} \\ n = \dfrac{-c-am}{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_h = e^{mx+ny} = e^{mx - \frac{c+am}{b}y} = e^{-\frac{c}{b}y}\, e^{m(x-\frac{a}{b}y)}$$

$$= e^{-\frac{c}{b}y}\, e^{-\frac{m}{b}(ay-bx)} = e^{-\frac{c}{b}y}\, \varphi(ay-bx)$$

لذا برای هر عامل درجه اول $aD+bD'+c=0$ که در آن $D=\frac{\partial}{\partial x}$ ،

$D'=\frac{\partial}{\partial y}$ ، پایه جوابی به صورت

$$e^{-\frac{c}{a}x}\varphi(ay-bx),\quad a\neq 0$$

یا

$$e^{-\frac{c}{b}y}\varphi(ay-bx),\quad b\neq 0$$

داریم.

مثال 7 جواب عمومی PDE زیر را بیابید:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}+4u=0$$

PDE مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید

$$az_{xx}+bz_{xy}+cz_{yy}+dz_x+ez_y+fz=0$$

با تعریف عملگرها

$$D=\frac{\partial}{\partial x},\quad D^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2},\quad D'=\frac{\partial}{\partial y},\quad D'^2=\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

شکل عملگری معادله را نوشته و آن را به صورت حاصلضرب عوامل درجه اول از D و D' تجزیه می‌کنیم.

$$aD^2 + bDD' + cD'^2 + dD + eD' + f = 0$$

$$(l_1 D + m_1 D' + n_1)(l_2 D + m_2 D' + n_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 D + m_1 D' + n_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-n_1/l_1\, x}\, \varphi(l_1 y - m_1 x), & l_1 \neq 0 \\ e^{-n_1/m_1\, x}\, \varphi(l_1 y - m x), & m_1 \neq 0 \end{cases} \\ l_2 D + m_2 D' + n_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-n_2/l_2\, x}\, \varphi(l_2 y - m_2 x), & l_2 \neq 0 \\ e^{-n_2/m_2\, y}\, \varphi(l_2 y - m_2 x), & m_2 \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

اگر عامل اول تکرار شده باشد یعنی به صورت

$$(l_1 D + m_1 D' + n_1)^2 = 0$$

باشد دو جوابی به صورت زیر خواهد داشت

$$\begin{cases} e^{-n_1/l_1\, x}\, \varphi(l_1 y - m_1 x),\ x e^{-n_1/l_1\, x}\, \varphi(l_1 y - m_1 x), & l_1 \neq 0 \\ e^{-n_1/m_1\, y}\, \varphi(l_1 y - m_1 x),\ y e^{-n_1/m_1\, y}\, \varphi(l_1 y - m_1 x), & m_1 \neq 0 \end{cases}$$

مثال 8. جواب عمومی PDE های زیر را بیابید.

(a) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=0$

(b) $u_{xx}+4u_{yy}=0$

(c) $4u_{xx}+12u_{xy}+9u_{yy}=0$

(d) $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-u_{x}-2u_{y}=0$

5-2 روش جداسازی متغیرها[1] (روش ضربی)

جداسازی متغیرها ساده‌ترین تکنیک برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. در این روش جواب عمومی بدست نمی‌آید بلکه جواب به شکل خاص بدست می‌آید. در واقع، جواب به صورت سری فوریه و انتگرال فوریه نتیجه می‌شود که نوسانات جواب را مشخص می‌کنند.

فرض کنید معادله دیفرانسیل جزئی برای تابع $u(x,y)$ مطرح شده باشد. در این روش، جواب را به صورت حاصلضرب توابعی از متغیرهای مستقل در نظر می‌گیریم. با جایگذاری $u(x,y)$ در معادله اگر بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$R_1(x, F, F', \dots) = R_2(y, G, G', \dots),$$

آن‌گاه فرض اولیه صحیح بوده و قاعدتاً هر دو عبارت بایستی برابر یک ثابت باشند. لذا دو معادله دیفرانسیل معمولی برای توابع $F(x)$ و $G(y)$ نتیجه می‌شود که با حل آن‌ها، F و G و در نتیجه u بدست می‌آید.

مثال 9.

(a) $u_{xy} + u_x + x + y = 0$

(b) $x u_x = y u_y$

(c) $x^2 u_{xx} + x u_x + u_{yy} = 0$

---

[1] separation of variables

67

فصل سوم — معادله موج

1-3 معادله موج محدود یک بعدی همگن با شرایط مرزی دیریکله

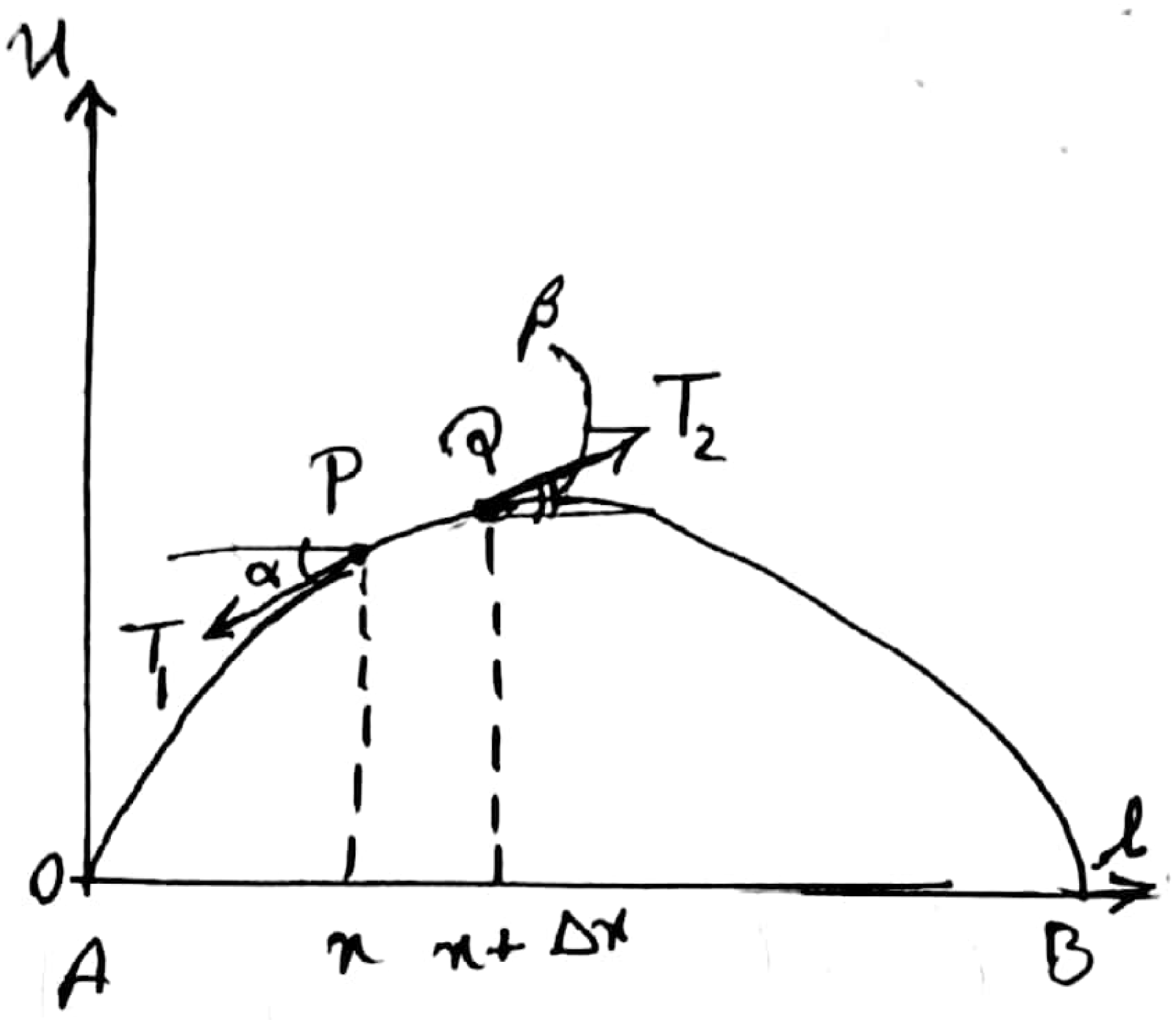
در این بخش ارتعاشات عرضی کوچک تاری کشسان به طول L که دو انتهای آن ثابت و بدون حرکت است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نشان می‌دهیم که معادله حاکم بر چنین وضعیتی یک معادله دیفرانسیل جزئی است. برای رسیدن به معادله تار مرتعش، فرض کنید تار از وضع تعادل خارج شده و سپس در لحظه‌ای مانند $t=0$ رها شده و به ارتعاش در آید. مساله مشخص کردن ارتعاش تار یعنی تعیین $u(x,t)$، انحراف تار در یک نقطه دلخواه x در لحظه t است.

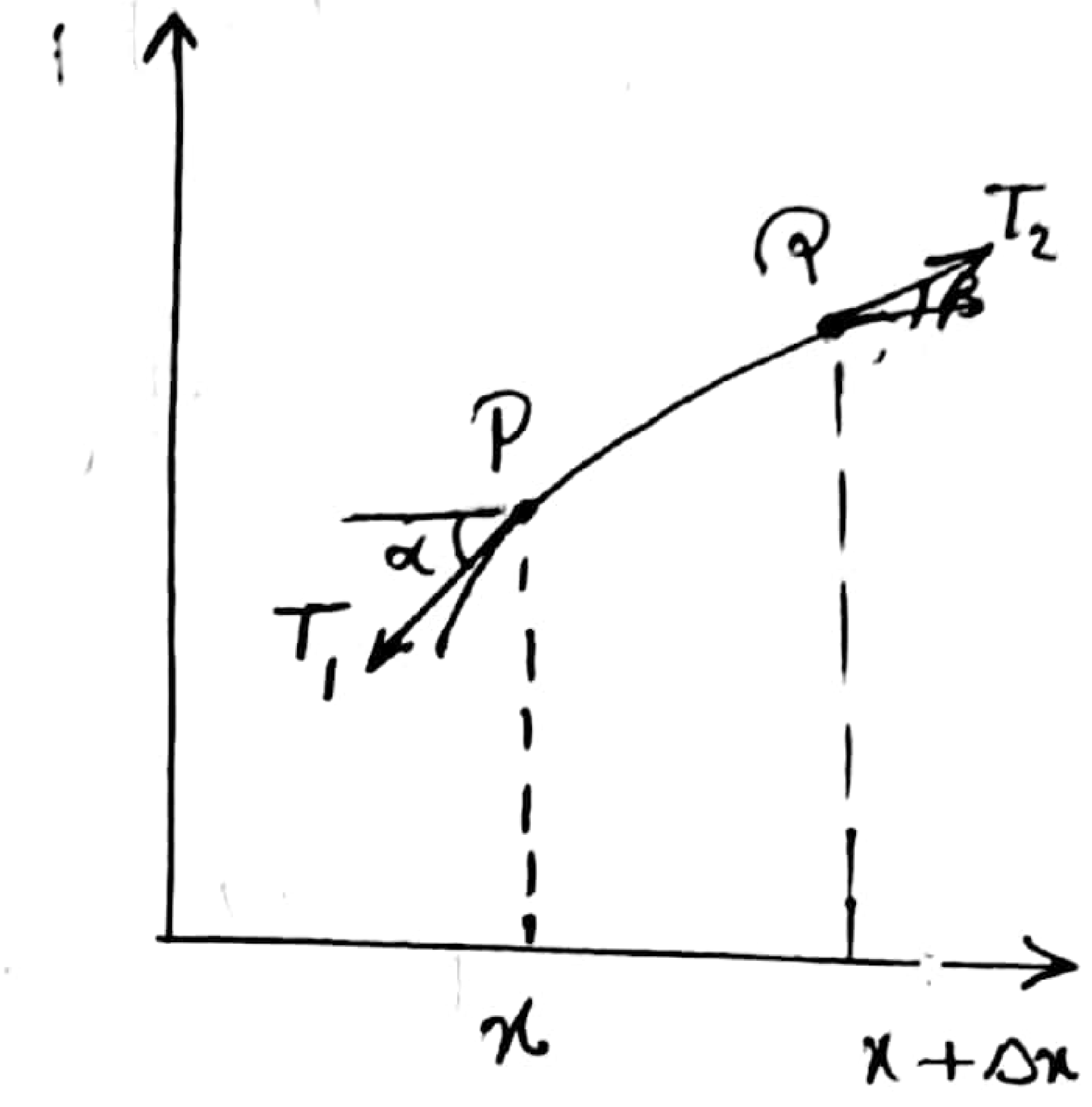
در معادلات دیفرانسیل معمولی بعد از رسیدن به معادله دیفرانسیل متناظر برای یک مساله فیزیکی نیاز بر شناخت برخی مفروضات ساده‌ای داشتیم تا به کمک آن‌ها بتوان جواب مساله دست یافت. در اینجا نیز چنین است.

شرایط فیزیکی زیر را می‌پذیریم

1. جرم تار بر واحد طول ثابت است (تار همگن است)
2. تار کشسان (الاستیک، انعطاف‌پذیر) بوده و هیچ گونه مقاومتی در مقابل خمش از خود نشان نمی‌دهد.
3. نیروی کششی که بر اثر کشیدن تار قبل از ثابت کردن دو سر آن ایجاد می‌شود بسیار بزرگ بوده و نیروی جاذبه وارد بر تار در مقابل آن قابل چشم‌پوشی است.
4. طبق قانون هوک، نیروهای کششی در هر نقطه مماس بر تار هستند.
5. حرکت تار یک ارتعاش کوچک عرضی در صفحه‌ای قائم است، یعنی هر قسمت تار تنها به صورت قائم حرکت می‌نماید (حرکت تار عمود بر راستای طول تار است).
6. مقدار تغییر مکان (انحراف) و شیب تغییر مکان (شیب تار) در هر نقطه به مراتب کمتر از طول تار است.

برای بدست آوردن معادله حاکم بر ارتعاش یک تار کشسان، نیروهایی که بر قسمت کوچکی از تار وارد می‌شوند، بررسی می‌کنیم.





بدین منظور قسمت کوچکی از تار، به عنوان مثال قطعه PQ به طول Δx را در نظر گرفته و نیروهای وارد بر آن را مشخص می‌کنیم. نیروی کششی از A به PQ را با T_1 و زاویه بردار نیرو با محور xها را با α نشان دهید. همچنین نیروی کششی از B به PQ را با T_2 و زاویه بین بردار نیرو با محور xها را با β نشان دهید. در این صورت تصویر نیروها بر محور xها عبارتند از $T_1 \cos\alpha$ و $T_2 \cos\beta$. با توجه به اینکه حرکت افقی وجود ندارد، از قانون دوم نیوتن داریم

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{ثابت} \qquad (1-3)$$

از طرفی تصویر نیروها بر محور yها عبارت است از $-T_1 \sin\alpha$ و $T_2 \sin\beta$. لذا بنا به قانون دوم نیوتن برایند این نیروها در هر نقطه بین x و $x+\Delta x$ برابر است با جرم، $\rho\Delta x$، ضرب در شتاب، $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$، یعنی،

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2 \sin\beta}{\Delta x} - \frac{T_1 \sin\alpha}{\Delta x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با توجه به (۱-۳) داریم

$$\frac{T_2 \sin\beta}{\Delta x\, T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{\Delta x\, T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

اگر P و Q به اندازه کافی به هم نزدیک شوند ($\Delta x \to 0$) آن گاه

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با فرض $c^2 = \frac{T}{\rho}$ داریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2-3)$$

c^2 به این دلیل انتخاب شده است تا نشان دهد این مقدار ثابت، $\frac{T}{\rho}$، همواره مثبت است. یک بعدی بودن نیز به این خاطر است که معادله تنها شامل یک متغیر فضایی، x، است.

c را سرعت انتشار ارتعاشی (تغییر مکان یاد شده در تار نسبت به حالت افقی) می‌نامند.

برای تعیین شرایط تکمیلی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نقاط A و B در طول حرکت ارتعاشی تار ثابت هستند. لذا باید شرایط مرزی

$$BC: \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0, \end{cases} \qquad (3-3)$$

برقرار باشند.

علاوه بر این، وضعیت اولیه تار با معادله $u(x,0)=f(x)$ مشخص می‌شود. اگر ارتعاش با سرعت اولیه $g(x)$ انجام شود باید داشته باشیم $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x)$. لذا شرایط اولیه مسئله به شکل

$$IC:\begin{cases} u(x,0)=f(x), & 0\le x\le l,\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x), & 0\le x\le l,\end{cases} \qquad (4-3)$$

خواهند بود.

حال با استفاده از روش جداسازی متغیرها، جواب معادله دیفرانسیل (2-3) را طوری می‌یابیم که در شرایط تکمیلی (3-3) و (4-3) نیز صدق کند. بدین منظور سه مرحله زیر را در نظر می‌گیریم:

I. با استفاده از روش جداسازی متغیرها، یعنی جایگذاری $u(x,t)=F(x)G(t)$ در (2-2) دو معادله دیفرانسیل معمولی بدست می‌آوریم، یکی برای $F(x)$ و دیگری برای $G(t)$.

II. جواب ODE های حاصل را طوری تعیین می‌کنیم که در شرایط مرزی (3-3) صدق کند.

III. با استفاده از سری فوریه، جواب حاصل از مرحله II را طوری می‌سازیم که جوابی از (2-3) باشد و در شرایط تکمیلی (3-3) و (4-3) صدق کند، به عبارت دیگر جواب مسئله حاصل از مدل‌سازی ارتعاش یک تار باشد.

I. جواب‌های معادله موج (2-3) را به صورت $u(x,t)=F(x)G(t)$ در نظر بگیرید.
با جایگذاری u در معادله دیفرانسیل جزئی (2-3) داریم

$$F\ddot{G}=c^2F''G \Rightarrow \frac{F''}{F}=\frac{\ddot{G}}{c^2G}$$

تساوی زمانی برقرار است که دو طرف برابر یک مقدار ثابت باشند. در واقع، عبارت سمت چپ فقط تابعی از x و عبارت سمت راست تابعی از t است.

اگر چنین نباشد، آن‌گاه تغییر x یا t تنها در یک طرف تاثیر دارد و طرف دیگر بدون تغییر می‌ماند. لذا بایستی داشته باشیم

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$$

بنابراین داریم

$$F'' - kF = 0, \tag{5-3}$$

و

$$\ddot{G} - c^2 k G = 0. \tag{6-3}$$

II. برقراری شرایط مرزی

جواب‌های F و G از معادلات (5-3) و (6-3) را طوری تعیین می‌کنیم که $u = FG$ در شرایط مرزی (3-3) صدق کند، یعنی،

$$u(0,t) = F(0)\,G(t) = 0, \quad u(l,t) = F(l)\,G(t) = 0, \quad \forall t, \tag{7-3}$$

نخست، معادله (5-3) را حل می‌کنیم. اگر $G \equiv 0$ آن‌گاه $u = FG \equiv 0$، که یک جواب بدیهی است. هدف از حل مسأله، یافتن جواب‌های غیربدیهی است. لذا فرض کنید $G \not\equiv 0$.

از این رو، از (7-3) داریم

$$(a)\ F(0) = 0, \qquad (b)\ F(l) = 0. \tag{8-3}$$

نشان می‌دهیم k بایستی منفی باشد.

به ازای $k=0$، یک جواب عمومی (5-3)، $F = ax + b$ است. از (8-3) داریم $a = b = 0$. بنابراین $F \equiv 0$ و در نتیجه $u \equiv 0$. لذا kهای صفر از مجموعه جواب‌ها حذف می‌شوند.

به ازای $k = \mu^2$ مثبت داریم

$$F'' - kF = 0 \Rightarrow F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

با توجه به شرایط (8-3) داریم $F \equiv 0$. لذا تنها انتخابی که باقی می‌ماند μهای منفی هستند.

فرض کنید $k=-\mu^2$. در این صورت معادله (3-5) به صورت زیر خواهد شد

$$F'' + \mu^2 F = 0 \Rightarrow F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x,$$

با توجه به شرایط مرزی (3-8) داریم

$$F(0) = A = 0, \qquad F(l) = B\sin\mu l = 0.$$

باید فرض کنیم $B \neq 0$ زیرا در غیر این صورت $F \equiv 0$. لذا

$$\sin\mu l = 0 = \sin n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

در نتیجه داریم

$$F(x) = B\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

چون به ازای هر n یک جواب بدست می‌آید، قرار می‌دهیم (به ازای نامتناهی مقدار گسسته λ، مسأله دارای جواب غیر بدیهی است)

$$F_n(x) = B_n\sin\frac{n\pi}{l}x = B_n\sin\lambda_n x,$$

که در آن $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$.

توجه کنید لزومی ندارد مقادیر منفی n را در نظر بگیریم زیرا $\sin(-\lambda_n x) = -\sin\lambda_n x$.
درواقع، به ازای اعداد صحیح منفی n، طبیعتاً همان جواب را با انتخاب یک علامت منفی بدست می‌آوریم.

λ_n ها را مقادیر ویژه و F_n ها را توابع ویژه می‌نامند.

به ازای $k = -\mu^2 = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$، جواب عمومی معادله (3-6) به صورت زیر خواهد شد

$$G_n(t) = C_n\cos(\lambda_n ct) + D_n\sin(\lambda_n ct)$$

بنابراین

$$u_n(x,t) = F_n(x)\, G_n(t) = G_n(t)\, F_n(x)$$

$$= \left(a_n \cos(\lambda_n c t) + b_n \sin(\lambda_n c t)\right) \sin(\lambda_n x),$$

که در آن $a_n = C_n B_n$ و $b_n = D_n B_n$، جواب های معادله موج یک بعدی محدود هستند که در شرایط مرزی دیریکله نیز صدق می کنند.

III.

حال با توجه به قضیه (روی هم گذاری) ذکر شده در اوایل فصل 2، جواب نهایی معادله موج محدود خطی همگن را می توان به صورت زیر نوشت

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\lambda_n c t) + b_n \sin(\lambda_n c t)\right) \sin(\lambda_n x),$$

برای محاسبه ضرایب از شرایط اولیه استفاده می شود. داریم

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x),$$

برای برقراری تساوی کافی است a_n را برابر ضرایب سینوسی فوریه تابع f اختیار کنیم. لذا

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin(\lambda_n x)\, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

از طرفی داریم

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x) \Rightarrow g(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-c\lambda_n a_n \sin(\lambda_n ct)+c\lambda_n b_n \cos(\lambda_n ct)\right)\sin(\lambda_n x)\right]_{t=0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_n b_n \sin(\lambda_n x)$$

ضریب b_n را طوری می‌یابیم که به ازای $t=0$، $\frac{\partial u}{\partial t}$ یک بسط نیم دامنه‌ای $g(x)$ (سری سینوسی فوریه $g(x)$) باشد، یعنی

$$c\lambda_n b_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{cl\frac{n\pi}{l}}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx,$$

$$n=1,2,\dots$$

در حل معادله موج با روش جدا سازی متغیرها علامت ثابت جدا سازی را طوری انتخاب می‌کنیم که جواب معادله موج تابع متناوب مربوط به زمان باشد.

مثال ۱

(i) $u_{tt} = 4u_{xx}$

$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \forall t$

$u(x,0) = x, \ 0 \leq x \leq 1$

$u_t(x,0) = 0, \ 0 \leq x \leq 1$

(ii) $u_{tt} = 4u_{xx}$

$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ \forall t$

$u(x,0) = 0, \ 0 \leq x \leq 1$

$u_t(x,0) = 1, \ 0 \leq x \leq 1$

مثال 2. تار مرتعش به طول 2 متر از حالت تعادل (کشیده شده بین دو نقطه) با سرعت اولیه $300\sin 4\pi x$ به نوسان در می‌آید. با فرض $c = 30\,m/s$، حداکثر جابجایی نقطه $x = \frac{1}{8}$ چقدر خواهد بود؟

2-3 معادله موج یک بعدی همگن با شرایط مرزی نیومن

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \; t > 0,$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$
$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k \Rightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 & (9\text{-}3) \\ \ddot{G} - kc^2 G = 0 & (10\text{-}3) \end{cases}$$

همانند حالت دیریکله، شرایط مرزی را بررسی می‌کنیم.

جواب F و G از معادلات (3-9) و (3-10) را طوری تعیین می‌کنیم که $u = FG$ در شرایط مرزی نیومن صدق کند، یعنی،

$$u_x(0,t) = F'(0)\,G(t) = 0, \quad u_x(l,t) = F'(l)\,G(t) = 0, \; \forall t \quad (11\text{-}3)$$

با توجه به اینکه هدف بدست آوردن یک جواب غیر بدیهی است، باید داشته باشیم $G(t) \neq 0$.

در این صورت از (3-11) داریم

$$(a)\; F'(0) = 0, \qquad (b)\; F'(l) = 0 \qquad (12\text{-}3)$$

به ازای $k = \mu^2 (> 0)$ داریم

$$F'' - kF = F'' - \mu^2 F = 0 \Rightarrow F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

با توجه به شرایط (3-12) داریم $F \equiv 0$. لذا kهای مثبت منجر به جواب بدیهی می‌شود.

به ازای $k=0$ داریم.

$$F''=0 \Rightarrow F(x)=ax+b$$

با استفاده از شرایط مرزی (12-3) داریم

$$F'(0)=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow F(x)=b,$$

از طرفی از $\ddot{G}=0$ داریم $G(t)=C_1t+D_1$ لذا

(13-3) $u(x,t)=ct+d. \quad (c=bC_1, d=bD_1)$

فرض کنید $k=-\mu^2$. در این صورت داریم

$$F''+\mu^2F=0 \Rightarrow F(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$$

با اعمال شرایط مرزی (12-3) داریم

$$(F'(x)=-A\mu\sin(\mu x)+B\mu\cos(\mu x))$$

$$F'(0)=0 \Rightarrow B=0$$

$$F'(l)=0 \Rightarrow -A\mu\sin(\mu l)=0 \xRightarrow{A\neq 0} \sin(\mu l)=0=\sin(n\pi)$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{n\pi}{l}, \quad n=1,2,\dots$$

و

$$F(x)=A\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

با توجه به اینکه به ازای هر n یک جواب بدست می‌آید، قرار می‌دهیم

$$F_n(x)=A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=A_n\cos(\lambda_n x),$$

که در آن $\lambda_n=n\pi/l$.

به ازای $k=-\mu^2$، جواب عمومی (10-3) به صورت زیر خواهد شد

$$G_n(t)=C_n\cos(\lambda_n ct)+D_n\sin(\lambda_n ct)$$

بنابراین

$$u_n(x,t)=\left(a_n\cos(\lambda_n ct)+b_n\sin(\lambda_n ct)\right)\cos(\lambda_n x),$$

که در آن $a_n=A_nC_n$ و $b_n=A_nD_n$.

لذا در این حالت داریم

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\lambda_n ct)+b_n\sin(\lambda_n ct)\right)\cos(\lambda_n x), \qquad (18-3)$$

از (13-3) و (14-3) داریم

$$u(x,t)=ct+d+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\lambda_n ct)+b_n\sin(\lambda_n ct)\right)\cos(\lambda_n x)$$

به دلیل محدودیت‌های فیزیکی در نوسان تار، $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ باید محدود باشد. لذا ct بایستی صفر شود. (u انحراف تار در مکان x و در لحظه $t>0$ است و نوسانات تار نیز محدود است) لذا

$$u(x,t)=d+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\lambda_n ct)+b_n\sin(\lambda_n ct)\right)\cos(\lambda_n x).$$

برای محاسبه ضرایب از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم. داریم

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow f(x)=d+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\lambda_n x),$$

برای برقراری تساوی بالا کافی است a_n را برابر ضرایب کسینوسی فوریه تابع f اختیار کنیم. لذا

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\lambda_n x)\,dx, \quad n=1,2,\dots$$

$$d=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$u_t(x,0)=g(x) \Rightarrow g(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\lambda_n c\, a_n \sin(\lambda_n ct)+\lambda_n c\, b_n \cos(\lambda_n ct)\right)\cos(\lambda_n x)\right]_{t=0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_n b_n \cos(\lambda_n x),$$

لذا ضریب b_n را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای $t=0$، $\frac{\partial u}{\partial t}$ یک بسط نیم دامنه‌ای $g(x)$ باشد، یعنی

$$c\lambda_n b_n=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cos(\lambda_n x)\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\cos(\lambda_n x)\,dx,\quad n=1,2,\dots$$

* همان‌طور که ملاحظه می‌شود در شرایط مرزی دیریکله، بسط نیم دامنه‌ای فرد برای توابع $f(x)$ و $g(x)$ داریم در حالی که در شرایط مرزی نویمن، بسط نیم دامنه‌ای زوج برای توابع فوق داریم.

3-3 معادله موج یک بعدی همگن با شرایط مرزی رابین (شرایط مرزی دیریکله-نیومن)

در این حالت معادله موج با شرایط اولیه-مرزی را می‌توان به صورت های ایر در نظر گرفت

(a)
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

یا

(b)
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0<x<l, \ t>0$$
$$\begin{cases} u_x(0,t) = 0, \ t\geq 0 \\ u(l,t) = 0, \ t\geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \ 0\leq x\leq l \\ u_t(x,0) = g(x), \ 0\leq x\leq l \end{cases}$$

با انجام مراحل مشابه به بخش های قبلی داریم

$$u = FG \Rightarrow \frac{F''}{F} = \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = k \Rightarrow \begin{cases} F'' - kF = 0 \\ \ddot{G} - c^2 k G = 0 \end{cases}$$

در اینجا شرایط مسأله (a) را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \overset{G\neq 0}{\Longrightarrow} F(0) = 0 \\ u_x(l,t) = 0 \overset{G\neq 0}{\Longrightarrow} F'(l) = 0 \end{cases}$$

حالت اول. $k = \mu^2$

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$F'(l) = 0 \Rightarrow A\mu e^{\mu l} - B\mu e^{-\mu l} = 0 \Rightarrow A\mu(e^{\mu l} + e^{-\mu l}) = 0$$

$$\overset{\mu\neq 0}{\Longrightarrow} 2A\cos(\mu l) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow F \equiv 0$$

لذا k های مثبت از مجموعه جواب حذف می‌شوند.

حالت دوم. $k=0$

$$F(x)=ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l} F(0)=0 \Rightarrow b=0 \\ F'(l)=0 \Rightarrow a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow F\equiv 0$$

لذا $k=0$ نیز منجر به جواب بدیهی می‌شود.

حالت سوم. $k=-\mu^2$

$$F(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$$

$$F(0)=0 \Rightarrow A=0$$

$$F'(l)=0 \Rightarrow \mu B\cos(\mu l)=0 \xRightarrow{\mu\neq 0} B\cos(\mu l)=0$$

فرض کنید $B\neq 0$. در این صورت

$$\cos(\mu l)=0=\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) \Rightarrow \mu=\frac{(2n-1)\pi}{2l},\ n=1,2,\dots$$

لذا

$$F_n(x)=B_n\sin(\lambda_n x), \qquad \lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}$$

$$\Rightarrow u_n(x,t)=\left(a_n\cos(\lambda_n ct)+b_n\sin(\lambda_n ct)\right)\sin(\lambda_n x)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\lambda_n ct)+b_n\sin(\lambda_n ct)\right)\sin(\lambda_n x)$$

تبصره. جواب کلی معادله موج یک بعدی همگن محدود با شرایط مرزی همگن به صورت زیر است

$$u(x,t) = d + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(\lambda_n x) + B_n \sin(\lambda_n x)\right)\left(C_n \cos(\lambda_n c t) + D_n \sin(\lambda_n c t)\right)$$

شرایط مرزی دیریکله $\begin{cases} d = 0 \\ A_n = 0 \\ B_n = 1 \end{cases}$

C_n و D_n نیز با توجه به مفاهیم سری فوریه و اعمال شرایط اولیه بدست می‌آیند.

شرایط مرزی نیومن $\begin{cases} d \\ A_n = 1 \\ B_n = 0 \end{cases}$ " "

در حالتی که شرایط مرزی به صورت ترکیبی دیریکله - نیومن باشد، ممکن است هر یک ضرایب A_n، B_n، C_n، D_n و d ناصفر باشند.

4-3 معادله موج یک بعدی ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), \quad 0<x<l, \quad t>0 \qquad (15-3)$$

$$u(0,t) = p(t), \quad t \geq 0$$

$$u(l,t) = q(t), \quad t \geq 0 \qquad (16-3)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

($h(x,t)$ بیانگر نیروی خارجی است که به طور پیوسته به مکان x در زمان t وارد می‌شود)

برای حل معادله موج (15-3) با شرایط تکمیلی (16-3) جوابی به صورت $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ در نظر می‌گیریم و $w(x,t)$ را چنان تعیین می‌کنیم که معادله موج برحسب v دارای طرف دوم نباشد (ناهمگن نشود). به عبارت دیگر، شرایط مرزی برای v همگن شوند. درواقع، $w(x,t)$ بار ناهمگنی شرایط مرزی را به دوش می‌کشد.

با توجه به شرایط مرزی مسأله داریم

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = p(t),$$

$$u(l,t) = v(l,t) + w(l,t) = q(t),$$

با توجه به اینکه می‌خواهیم شرایط مرزی مسأله برحسب v همگن شوند، $v(0,t)$ و $v(l,t)$ را صفر اختیار می‌کنیم. لذا

$$w(0,t) = p(t), \qquad w(l,t) = q(t),$$

ساده ترین منحنی که از دو نقطه فوق می‌گذرد معادله خطی است به شکل زیر

$$w(x,t)=P(t)+\frac{q(t)-P(t)}{l}x$$

با مشخص شدن w، تابع $u=v+w$ را در معادلات (15-3)، و (16-3) جایگذاری می‌کنیم. لذا

$$u_{xx}=v_{xx}+w_{xx}\overset{w_{xx}=0}{\Longrightarrow}u_{xx}=v_{xx}$$

$$u_{tt}=v_{tt}+w_{tt}$$

$$\Rightarrow v_{tt}=c^2v_{xx}-w_{tt}+h(x,t)$$

با فرض $H(x,t)=-w_{tt}+h(x,t)$ داریم

$$v_{tt}=c^2v_{xx}+H(x,t) \qquad (17-3)$$

شرایط اولیه و مرزی نیز به صورت زیر خواهند شد

$$v(0,t)=v(l,t)=0\ ,\quad t\geq 0$$

$$v(x,0)=f(x)-w(x,0)=f_1(x)\ ,\quad 0\leq x\leq l$$

$$v_t(x,0)=g(x)-w_t(x,0)=g_1(x)\ ,\quad 0\leq x\leq l$$

(18-3)

برای حل معادله موج ناهمگن (17-3) با شرایط (18-3) به شکل زیر عمل می‌کنیم

$v(x,t)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}F(t)\sin\lambda x,\qquad \lambda=\frac{n\pi}{l}$$

باجایگذاری v در معادلات فوق، تابع $F(t)$ بدست می‌آید و در نتیجه جواب عمومی معادلات (۲) مشخص می‌شود. سپس با اعمال شرایط اولیه، ضرایب مجهول بدست می‌آید. جزئیات این کار در زیر آمده است:

با جایگذاری در معادله (3-117) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(F''(t) + \lambda^2 c^2 F(t)\right) \sin \lambda x = H(x,t)$$

$$\Rightarrow F''(t) + \lambda^2 c^2 F(t) = \frac{2}{l}\int_0^l H(x,t) \sin \lambda x \, dx = q(t,\lambda)$$

$$\Rightarrow F(t) = F_h(t) + F_p(t)$$

که در آن

$$F_h(t) = A_n \cos(\lambda c t) + B_n \sin(\lambda c t)$$

و جواب خصوصی بسته به تابع $q(t,\lambda)$ می‌تواند تابعی مانند $M(t,\lambda)$ باشد.

بنابراین خواهیم داشت

$$F(t) = A_n \cos(\lambda c t) + B_n \sin(\lambda c t) + M(t,\lambda)$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(\lambda c t) + B_n \sin(\lambda c t) + M(t,\lambda)\right) \sin \lambda x$$

برای محاسبه ضرایب مجهول A_n و B_n از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم.

$$v(x,0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n + M(0,\lambda)\right) \sin \lambda x$$

$$\Rightarrow A_n + M(0,\lambda) = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x) \sin \lambda x \, dx \Rightarrow A_n = \cdots$$

$$v_t(x,0) = g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda c B_n + M'(0,\lambda)\right) \sin \lambda x$$

$$\Rightarrow \lambda c B_n + M'(0,\lambda) = \frac{2}{l}\int_0^l g_1(x) \sin \lambda x \, dx$$

مثال 3. مسأله مقدار اولیه-مرزی زیر را حل کنید:

$$u_{xx} = u_{tt} + xe^t, \quad 0<x<1, \ t>0$$

$u(0,t)=1$

$u(1,t)=e^t$

$u(x,0) = x+1$

$u_t(x,0) = x$

3-5 روش دالامبر برای حل معادله موج

دالامبر فرض کرد که جواب معادله موج یک بعدی ممکن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد
(فرض میز نیکی)

$$u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct),$$

که در آن $\varphi(x+ct)$ بیانگر یک موج مسافر به چپ و $\psi(x-ct)$ بیانگر یک موج مسافر به راست است.

با توجه به شرایط اولیه مسأله داریم

$$u(x,0)=f(x)\Rightarrow\varphi(x)+\psi(x)=f(x)\qquad(19-3)$$

و

$$u_t(x,0)=g(x)\Rightarrow c\varphi'(x)-c\psi'(x)=g(x)$$

$$\Rightarrow\varphi'(x)-\psi'(x)=\frac{1}{c}g(x)\qquad(20-3)$$

با انتگرال‌گیری از $(20-3)$ داریم

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{c}\int_0^x g(\xi)d\xi+k\qquad(k=\varphi(0)-\psi(0))\qquad(21-3)$$

با جمع روابط $(19-3)$ و $(21-3)$، و همچنین تفریق $(21-3)$ از $(19-3)$ داریم

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)d\xi+\frac{k}{2}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)d\xi-\frac{k}{2}$$

$$u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$$

$$=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}g(z)dz+\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2}\int_0^{x-ct}g(z)dz$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(z)dz \qquad (22-3)$$

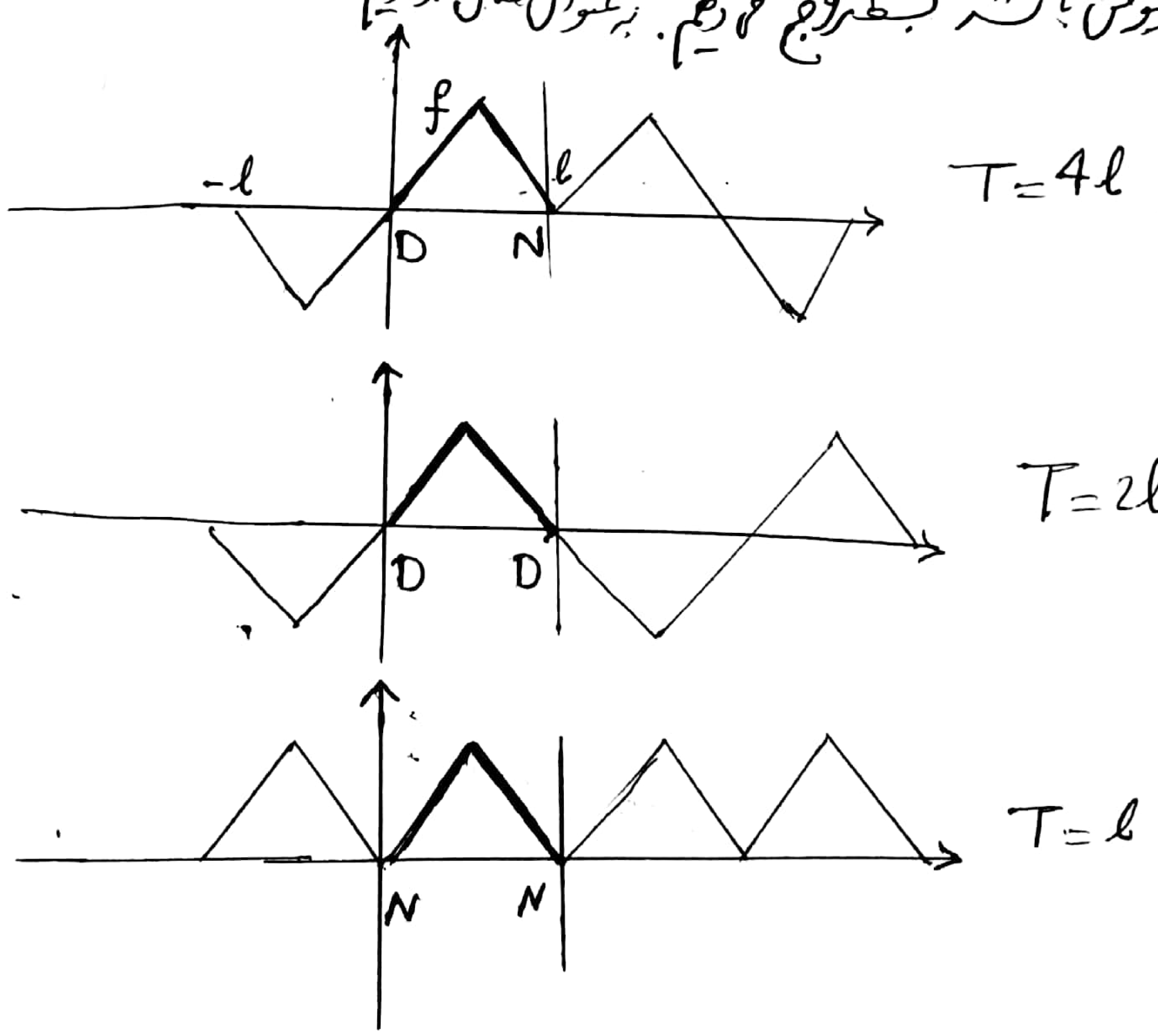
هرگاه سرعت اولیه صفر باشد آنگاه

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]$$

با توجه به شرایط مرزی می‌توان نشان داد تابع f بایستی فرد و با دوره تناوب $2l$ باشد.

روش بکاربردن جواب دالامبر

وقتی شرایط مرزی دیریکله باشد تابع را بصورت فرد بسط می‌دهیم و اگر شرایط مرزی نیومن باشد بسط زوج می‌دهیم. بعنوان مثال داریم



اگر شرط مرزی در $x=0$ روی u باشد، توابع f و g را نسبت به خط $x=0$ توسیع فرد می‌دهیم.

« « « « « مشتق u « « « « « « « « « « زوج «.

« « « « $x=l$ روی u داده شود « « « « « « « « $x=l$ توسیع فرد «.

« « « « « مشتق u « « « « « « « « « « زوج «.

مثال 4. در مسأله مقدار اولیه-مرزی زیر مقدار $u(\frac{1}{3},3)$ را بیابید.

$$u_{tt}=u_{xx}\,,\quad 0<x<1,\ t>0$$

$$u_x(0,t)=0$$

$$u(1,t)=0$$

$$u(x,0)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

$$u_t(x,0)=0$$

6-3 حل معادله موج در حالت نیم محدود

(در این حالت $l \to \infty$)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x>0, t>0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$\left(\lim_{x \to \infty} u(x,t) < \infty \right)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$$k = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} F'' + \lambda^2 F = 0 \\ \ddot{G} + \lambda^2 c^2 G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x) \\ G(t) = c_1 \cos(\lambda c t) + c_2 \sin(\lambda c t) \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0 \xRightarrow{G \neq 0} F(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

هیچ شرط مرزی دیگری وجود ندارد. لذا هیچ شرطی برای λ وجود نخواهد داشت. بنابراین مقدار ویژه (λ) به طور پیوسته تغییر می‌کند و هر عدد حقیقی مثبتی می‌تواند باشد. با توجه به اینکه به ازای هر λ یک تابع ویژه مشخص می‌شود، در فرم کلی جواب به جای $\sum$ از انتگرال استفاده می‌کنیم. لذا

$$u_\lambda(x,t) = \left(A(\lambda) \cos(\lambda c t) + B(\lambda) \sin(\lambda c t) \right) \sin(\lambda x)$$

و

$$u(x,t) = \int_0^\infty \left[A(\lambda) \cos(\lambda c t) + B(\lambda) \sin(\lambda c t) \right] \sin(\lambda x)\, d\lambda \tag{23-3}$$

با اعمال شرایط اولیه داریم

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^{\infty} A(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow A(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(z)\sin(\lambda z)\,dz$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\int_0^{\infty} c\lambda B(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow B(\lambda)=\frac{2}{\lambda c\pi}\int_0^{\infty} g(z)\sin(\lambda z)\,dz$$

بنابراین کافی است شرایط کراندار بودن $\int_0^{\infty}|f(x)|dx$ و $\int_0^{\infty}|g(x)|dx$ را اعمال کنیم. با جایگذاری $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ در (3-23) جواب نهایی به صورت $\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)$ بدست می‌آید.

فصل چهارم معادله حرارت

1-4 مقدمه

معادله حرارت یک معادله انتشاری است که تغییرات چگالی یک کمیت شیمیایی یا تغییرات حرارتی یک شیء را نسبت به زمان نشان می‌دهد. اگر V ناحیه‌ای هموار باشد، نرخ تغییرات کل کمیت u درون V برابر است با منفی شاری که از مرز ∂V می‌گذرد، یعنی:

$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx = -\int_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma, \qquad (1\text{-}4)$$

که در آن $\vec{n}$ بردار عمود خارجی سطح ∂V است و $\vec{F}$ چگالی جریان را نشان می‌دهد.

در بسیاری از کمیت‌های فیزیکی، $\vec{F}$ متناسب با جهت عکس گرادیان u است زیرا جریان از نواحی با کمیت بیشتر به سمت نواحی با کمیت کمتر اتفاق می‌افتد.

$$\vec{F} = -a\vec{\nabla}u, \quad (a>0), \qquad (2\text{-}4)$$

با جایگزین کردن (4-2) در (4-1) و با توجه به قضیه دیورژانس

$$\int_V \operatorname{div}F\,dx = \int_{\partial V}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma,$$

داریم

$$\int_V u_t\,dx = \int_V \operatorname{div}(a\nabla u)\,dx = \int_V a\nabla^2 u\,dx,$$

رابطه فوق برای هر ناحیه دلخواه V برقرار است. لذا

$$u_t = c^2\nabla^2 u, \qquad (3\text{-}4)$$

که در آن $a = c^2$ و $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

معادله (4-3) با تغییر t به $-t$ شکل خود را از دست می دهد (ضریب ثابت، منفی می شود).

از نظر فیزیکی این مطلب بدین صورت تعبیر می شود که معادله حرارت نسبت به زمان برگشت ناپذیر است، یعنی با استفاده از (4-3) تنها نسبت به آینده می توان اطلاعاتی بدست آورد و هر نوع اطلاعاتی در مورد گذشته با افزایش زمان از بین می رود.

در (4-3)، c^2 را ضریب نفوذی می نامند و برابر $\frac{K}{\sigma\rho}$ است که در آن K، ضریب هدایت گرمایی (رسانایی گرمایی)، σ، گرمای ویژه و ρ، چگالی جسم است.

به عنوان یکی از حالت های خاص و کاربردی معادله حرارت، تغییرات دمای یک میله نازک (یا سیم) با مقطع عرضی ثابت و همگن که در راستای محور x ها قرار دارد، بررسی می کنیم. فرض کنید سطح جانبی میله به طور کامل عایق بندی شده باشد به طوری که حرارت تنها در جهت محور x ها جریان یابد، در این صورت، u تنها به x و t بستگی دارد و معادله حرارت به صورت معادله یک بعدی زیر می شود

$$u_t = c^2 u_{xx} \qquad (4\text{-}4)$$

با توجه به اینکه تنها تفاوت ظاهری این معادله با معادله موج در مشتق u نسبت به زمان است ولی ملاحظه خواهیم کرد که رفتار جواب های معادله فوق کاملاً متمایز از رفتار جواب های معادله موج است.

2-4 معادله حرارت یک بعدی همگن با شرایط مرزی دیریکله

حل معادله (4-4) به شرایط تکمیلی وابسته است. حالتی را در نظر بگیرید که دمای نقاط انتهایی $x=0$ و $x=l$ در میله صفر باشد، در این صورت شرایط مرزی برای $t\geq 0$ به صورت

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \qquad (5-4)$$

است. اگر دمای اولیه این میله، تابع معروض $f(x)$ فرض شود آن گاه شرط اولیه عبارت است از

$$u(x,0)=f(x) \qquad (6-4)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها جواب $u(x,t)$ معادله (4-4) را طوری می‌یابیم که در شرایط اولیه - مرزی (5-4) و (6-4) صدق کنند.

با جایگذاری $u(x,t)=F(x)G(t)$ در (4-4) داریم

$$F\dot{G}=c^2F''G \Rightarrow \frac{F''}{F}=\frac{\dot{G}}{c^2G}=k \Rightarrow \begin{cases} F''-kF=0 \\ \dot{G}-c^2kG=0 \end{cases}$$

با توجه به شرایط مرزی (5-4) داریم

$$u(0,t)=0 \xrightarrow{G\neq 0} F(0)=0. \qquad (7-4)$$

$$u(l,t)=0 \xrightarrow{G\neq 0} F(l)=0$$

به آسانی می‌توان نشان داد. در حالتی که $k=-\mu^2$ باشد، جواب مسأله غیربدیهی خواهد شد. بنابراین داریم

$$F''+\mu^2F=0 \Rightarrow F(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$$

با اعمال شرایط مرزی (7-4) داریم

$$F(0)=0 \Rightarrow A=0$$

$$F(l)=0 \Rightarrow B\sin(\mu l)=0 \underset{B\neq 0}{\overset{\mu\neq 0}{\Longrightarrow}} \sin(\mu l)=0=\sin(n\pi)$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{n\pi}{l}, \quad n=1,2,\dots$$

$$\Rightarrow F_n(x)=B_n\sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l}.$$

از طرفی به ازای $k=-\mu^2$، جواب عمومی $\dot{G}+c^2kG=0$ عبارت است از

$$G_n(t)=C_n e^{-c^2\lambda_n^2 t},$$

لذا

$$u_n(x,t)=a_n\sin(\lambda_n x)\, e^{-c^2\lambda_n^2 t},$$

که در آن $a_n=B_nC_n$.

بنابراین داریم

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c^2\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x),$$

برای محاسبه ضریب a_n از شرط اولیه استفاده می‌کنیم. داریم

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{1}^{\infty} a_n \sin(\lambda_n x)$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\lambda_n x)$$

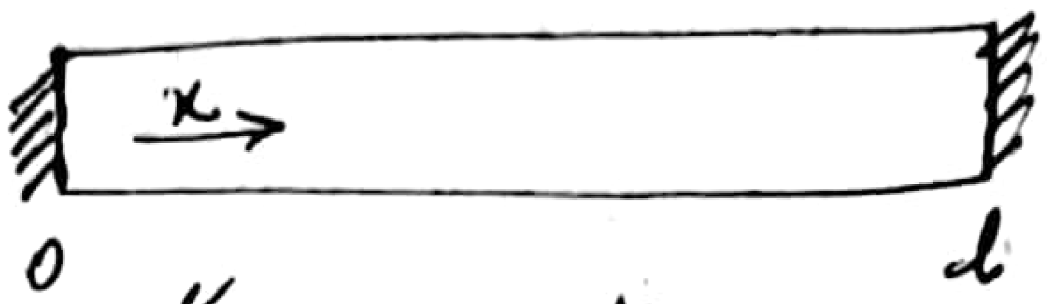
مثال ۱. دما در یک میله عایق‌پوشش شده‌ای را بیابید که دو سر آن در دمای صفر درجه قرار دارد و دمای اولیه آن نیز به شکل زیر است

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\frac{l}{2} \\ l-x, & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$$

مثال 2. میله‌ای به طول ۱۰ متر که دو سر آن در دمای صفر قرار گرفته و منبع حرارتی، توزیع دمای اولیه
را در نظر بگیرید
$x(10-x)$ را از خود بجا گذاشته و در معادله $u_t - u_{xx} = 0$ صدق می‌کند.
مطلوبست محاسبه دما در وسط میله.

3-4 معادله حرارت یک بعدی همگن با شرایط مرزی همگن نیومن

میله‌ای را در نظر بگیرید که دو سر آن عایق‌بندی شده است



در این صورت شرایط مرزی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0 \qquad (8\text{-}4)$$

فرض کنید دمای اولیه میله نیز به صورت زیر باشد

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le l$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها برای معادله $u_t=c^2u_{xx}$ و اعمال شرایط مرزی (8-4) داریم

$$u(x,t)=c^*+\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-c^2\lambda_n^2 t}\cos(\lambda_n x),$$

که در آن $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$. با استفاده از شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ داریم

$$c^*=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\lambda_n x)\,dx, \quad n=1,2,\dots$$

مثال 3. جواب مسأله اولیه-مرزی زیر را بیابید:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0<x<2, \quad t>0$$

$$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$$

$$u(x,0) = 4\cos(\pi x) - 2\cos(3\pi x)$$

4-4 معادله حرارت یک بعدی همگن با شرایط مرزی نوع سوم (دیریکله - نیومن)

اگر مرز به طور آزاد در هوا یا در مایع دلخواهی قرار داشته باشد آن گاه نسبت تبادل حرارت متناسب است با تفاوت درجه حرارت در جسم و محیط خارج، یعنی

$$q(x_0,t) = h\,(u(x_0,t) - T(t)), \quad (9\text{-}4)$$

که در آن $T(t)$، درجه حرارت محیط خارج و h ضریب تناسب است.

بنابه قانون فوریه، رابطه (9-4) را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,t) = h\,(u(x_0,t) - T(t))$$

با توجه به مطالب فوق، یکی از حالات معادله حرارت همگن با شرایط مرزی همگن دیریکله-نیومن را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\left.\begin{array}{l} u_t = c^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{array}\right\}$$

یک طرف میله عایق شده است و در طرف دیگر دما ثابت است

با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-c^2\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x),$$

که در آن $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$.

مثال 5. مسأله مقدار اولیه - مرزی زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(0,t) = T_0$$

$$h\,u(l,t) + k\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = h T_1$$

$$u(x,0) = f(x)$$

5-4 معادله حرارت یک بعدی ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن

معادله حرارت یک بعدی ناهمگن با شرایط مرزی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید

$$u_t = c^2 u_{xx} + h(x,t), \qquad (10\text{-}4)$$

st

$$u(0,t) = P(t), \qquad (11\text{-}4)$$
$$u(l,t) = q(t),$$
$$u(x,0) = f(x),$$

که در آن $h(x,t)$ بیانگر منبع گرمایی است که به طور پیوسته به مکان x در زمان t اعمال می‌شود.

برای حل معادله (10-4) با شرایط تکمیلی (11-4) از روندی مشابه با آنچه که برای حل معادله موج یک بعدی ناهمگن در بخش 3-4 بیان شده استفاده می‌کنیم. بنابراین جواب مسئله اولیه-مرزی فوق به صورت زیر خواهد شد

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$
$$= \sum_{1}^{\infty}\left(a_n e^{-\lambda^2 c^2 t} + M(t,\lambda)\right)\sin(\lambda x) + \frac{q(t)-P(t)}{l}x + P(t)$$

مثال 4. جواب مسئله اولیه-مرزی زیر را بیابید.

$$u_t - u_{xx} = \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right), \quad 0<x<l,\ t>0$$
$$u(0,t) = b, \quad u(l,t) = a$$
$$u(x,0) = b + \frac{a-b}{l}x$$

6-4 حالت تعادل

وقتی به جسمی حرارت می‌دهیم انتظار این است بعد از گذشت مدت زمانی، دما به حالت تعادل (پایا) برسد. در این صورت، تغییرات دما نسبت به زمان یعنی u_t، برابر صفر است. به عبارت دیگر، شار ورودی برابر شار خروجی می‌شود. البته این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که فاز تغییر نکند. به عنوان مثال، جامد به مایع تبدیل نشود. وقتی به یک جسم جامد گرما می‌دهیم ذوب نشود. زیرا در غیر این صورت، معادلات حاکم بر پدیده عوض می‌شوند. در نتیجه معادله (3-4) در حالت تعادل، به معادله لاپلاس تبدیل می‌شود.

معادله انتقال حرارت در یک میله متناهی را در نظر بگیرید. در حالت تعادل، انتظار این است تابع انتشار حرارت $u(x,t)$ وقتی $t\to\infty$، موجود و مستقل از t باشد، یعنی،

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)=v(x)$$

که در آن $v(x)$ بیانگر دمای حالت تعادل است.

در این صورت داریم

$$v_{xx}=0,\quad 0<x<\infty,\ t>0,$$

$$v(0)=T_0$$

$$v(l)=T_1$$

$$v(x,0)=f(x)$$

لذا

$$v(x)=Ax+B$$

با اعمال شرایط مرزی داریم

$$v(x)=T_0+\frac{T_1-T_0}{l}x$$

7-4 مسأله انتقال حرارت در یک میله با یک سر نامتناهی

میله ای را در نظر بگیرید که ابتدای آن در دمای صفر نگهداری می شود و انتهای آن در بی نهایت است. نقطه $x>0$ را در لحظه اولیه به درجه حرارت $f(x)$ می رسانیم. هدف، تعیین درجه حرارت نقطه دلخواه x در زمان t است.

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) < \infty$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها و با اعمال شرط مرزی مسأله داریم

$$u(x,t) = e^{-c^2\lambda^2 t}\left(A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\right)$$

$$u(0,t)=0 \Rightarrow F(0)=0 \Rightarrow A=0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = B\, e^{-\lambda^2 c^2 t}\sin(\lambda x)$$

با توجه به اینکه شرط مرزی دیگری نداریم، هیچ شرط دیگری برای λ نخواهیم داشت. بنابراین λ هر مقدار حقیقی را به طور پیوسته اختیار می کند. لذا به ازای هر λ یک جواب حاصل می شود. با توجه به خطی بودن معادله جواب کلی آن به صورت مجموع پیوسته ای از جوابها در قالب انتگرالی به صورت

$$u(x,t)=\int_0^\infty B(\lambda)\, e^{-c^2\lambda^2 t}\sin(\lambda x)\, d\lambda, \qquad (12-4)$$

مشخص می شود.

برای محاسبه $B(\lambda)$ از شرط اولیه استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^{\infty} B(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda$$

$$\Rightarrow B(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(z)\sin(\lambda z)\,dz$$

تذکر. اگر میله از دو طرف نامتناهی باشد آن‌گاه مسئله حرارت را می‌توان به صورت زیر مدل‌سازی کرد
(سطح جانبی میله عایق‌بندی شده است)

$$u_t=c^2u_{xx}\,,\quad -\infty<x<\infty,\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها، جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود

$$u(x,t)=\int_0^{\infty} u_\lambda(x,t)\,d\lambda=\int_0^{\infty}\left[A(\lambda)\cos(\lambda x)+B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]e^{-\lambda^2c^2t}\,d\lambda$$

که در آن

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos(\lambda z)\,dz$$

و

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin(\lambda z)\,dz$$

مثال. اگر حرارت در یک میله نامحدود با معادله

$$\begin{cases} u_t=c^2u_{xx} \\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$$

از رابطه

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,e^{-\frac{(x-w)^2}{4c^2t}}\,dw$$

محاسبه شود، حرارت در میله نیمه محدود با معادلات

$$u_{xx}=u_t-xe^t$$

$$u_x(0,t)=e^t$$

$$u(x,0)=x+1$$

را در یک ثانیه بعد در $x=1$ محاسبه کنید.

$$u(x,t) = v(x,t) + ax$$

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) + a \Rightarrow a = e^t \Rightarrow u(x,t) = v(x,t) + e^t x$$

$$u(x,0) = v(x,0) + x \Rightarrow v(x,0) = 1$$

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{xx} \\ u_t = v_t + e^t x \end{cases} \Rightarrow v_{xx} = v_t + e^t x - e^t x = v_t$$

بنابراین

$$\begin{cases} v_{xx} = v_t \\ v_x(0,t) = 0 \\ v(x,0) = 1 = F \end{cases}$$

با توجه به شرط مرزی $v_x(0,t)=0$، تابع P برای $x<0$ بایستی به صورت زوج توسیع داده شود. لذا

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(\int_{-\infty}^{0} F(w)\, e^{-\frac{(x-w)^2}{4t}}\, dw + \int_{0}^{\infty} F(w)\, e^{-\frac{(x-w)^2}{4t}}\, dw\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(\int_{0}^{\infty} F(w)\, e^{-\frac{(x+w)^2}{4t}}\, dw + \int_{0}^{\infty} F(w)\, e^{-\frac{(x-w)^2}{4t}}\, dw\right)$$

$$(F(w) = F(-w))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x+w)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-w)^2}{4t}}\right) dw$$

$$v(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(1+w)^2}{4}} + e^{-\frac{(1-w)^2}{4}}\right) dw$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(2\int_{1/2}^{\infty} e^{-X^2} dX + (-2)\int_{1/2}^{\infty} e^{-X^2} dX\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(\tfrac{1}{2}) - \sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(\tfrac{1}{2})\right) = 0$$

$$\Rightarrow u(1,1) = v(1,1) + w(1,1) = 0 + e = 1$$

فصل پنجم معادله لاپلاس

5-1 مقدمه

معادله لاپلاس در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی ظاهر می‌شود. در واقع، معادله لاپلاس بیانگر حالات تعادل است. به عنوان مثال، وقتی انتقال حرارت در یک جسم به حالت تعادل برسد، جواب معادله لاپلاس دما را در نقاط مختلف نشان می‌دهد.

فرض کنید $u(x)$ بیانگر چگالی یک ماده شیمیایی در یک محیط باشد. در حالت تعادل، میزان شار خروجی ماده شیمیایی مذکور از هر ناحیه V برابر صفر است، یعنی،

$$\int_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 0,$$

که در آن $\vec{F}$ شار چگالی را نشان می‌دهد که متناسب با گرادیان تابع u است

$$\vec{F} = -a\nabla u, \qquad (a>0),$$

با توجه به قضیه دیورژانس داریم

$$\int_{V} \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 0,$$

چون ناحیه V دلخواه است، داریم

$$\operatorname{div} F = 0,$$

به عبارت دیگر

$$\operatorname{div}(\nabla u) = 0 \Rightarrow \nabla^2 u = 0. \qquad (5-1)$$

اگر تابع u در ناحیه Ω در معادله لاپلاس صدق کند، آن را یک تابع هارمونیک می‌نامند.
یکی از خواص مهم تابع هارمونیک این است که ماکزیمم خود را روی مرز ناحیه می‌گیرد.
این خاصیت به یکتایی جواب معادله لاپلاس و پیوستگی جواب بر شرایط مرزی منجر می‌شود.

قضیه (اصل ماکزیمم). اگر $u \in C^2(\Omega)$ یک تابع هارمونیک در ناحیه Ω باشد که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای باز و هموار است آن‌گاه

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

در ادامه چند کاربرد معادله لاپلاس بیان می شود

• نیروی جاذبه ـ معادله حاکم بر نیروی جاذبه معادله لاپلاس است. هرگاه ذره A به جرم M در نقطه ثابت (X,Y,Z) و ذره B به جرم m در نقطه (x,y,z) قرار داشته باشند و ذره A، B را جذب کند، نیروی جاذبه بین دو ذره برابر گرادیان تابع زیر است

$$u(x,y,z) = \frac{c}{r}, \quad c = GMm \quad (\text{مقدار ثابت})$$

و

$$r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$$

این تابع به پتانسیل گرانش موسوم است و در معادله لاپلاس صدق می کند.

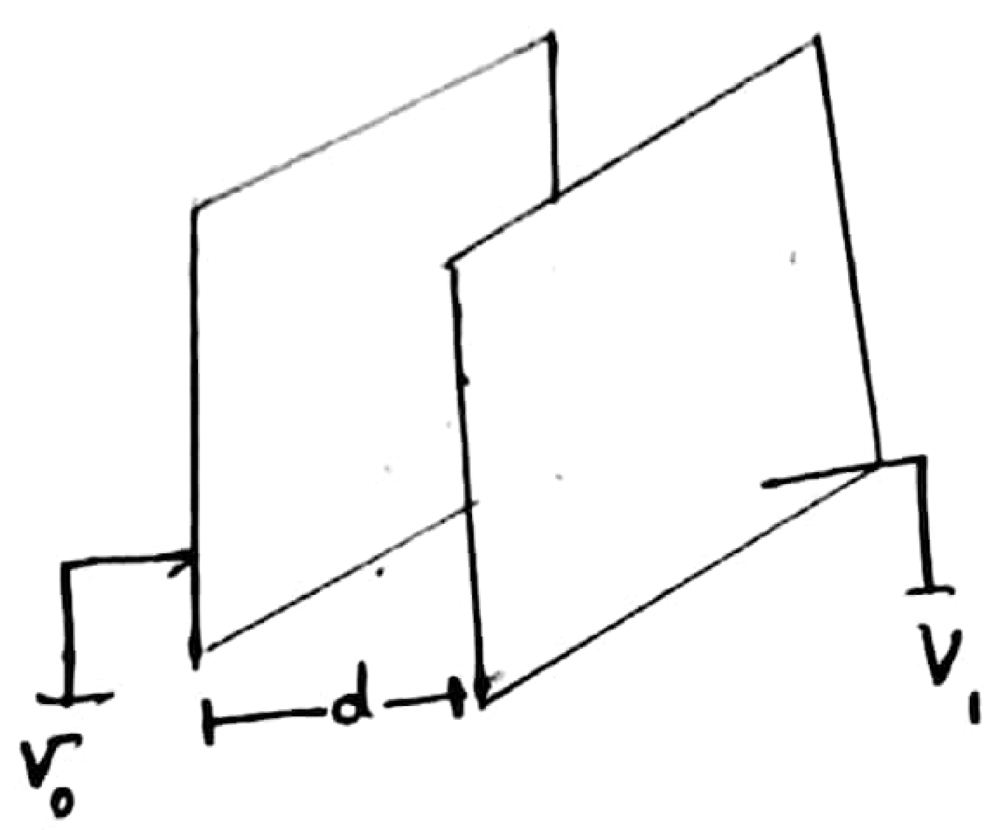
• الکترواستاتیک

نیروی الکتریکی جاذبه یا دافعه بین ذرات از قانون کولن که همان صورت ریاضی قاعده گرانش نیوتن را داراست، پیروی می کند. لذا میدان حاصل از توزیع بار الکتریکی از نقطه نظر ریاضی می تواند با تابع پتانسیلی، که در هر نقطه که بوسیله بار اشغال نشده باشد در معادله لاپلاس صدق می کند، بیان می شود.

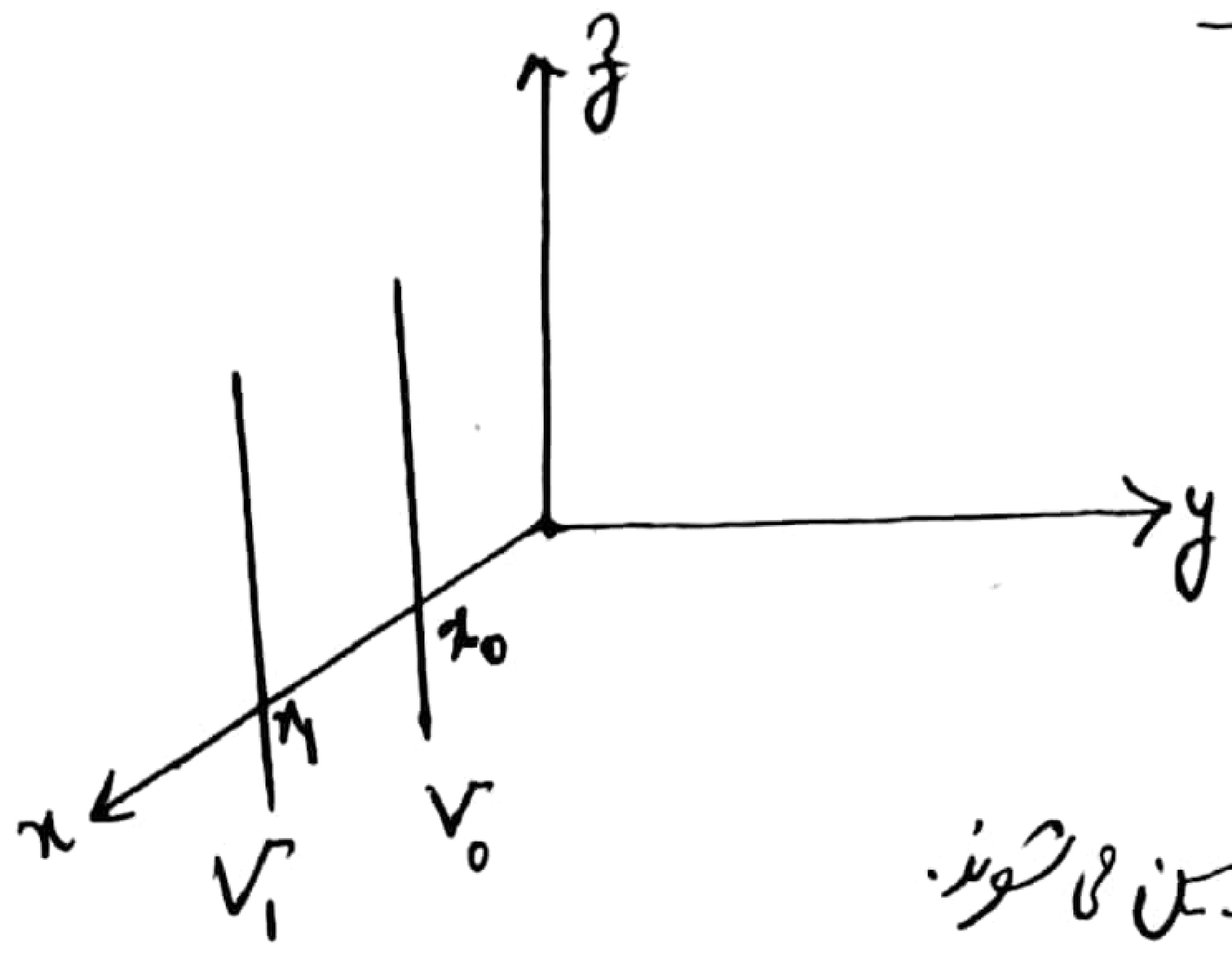
• هیدرودینامیک

معادله لاپلاس در رابطه با حالت پایدار جریان سیال تراکم ناپذیر نیز بیان می شود.

2-5 حل معادله لاپلاس یک بعدی در دستگاه مختصات دکارتی



زمانی که دو صفحه نامتناهی روبروی هم قرار گرفته اند، اختلاف پتانسیل بین دو صفحه فقط به فاصله بین آن ها وابسته است. در این حالت داریم

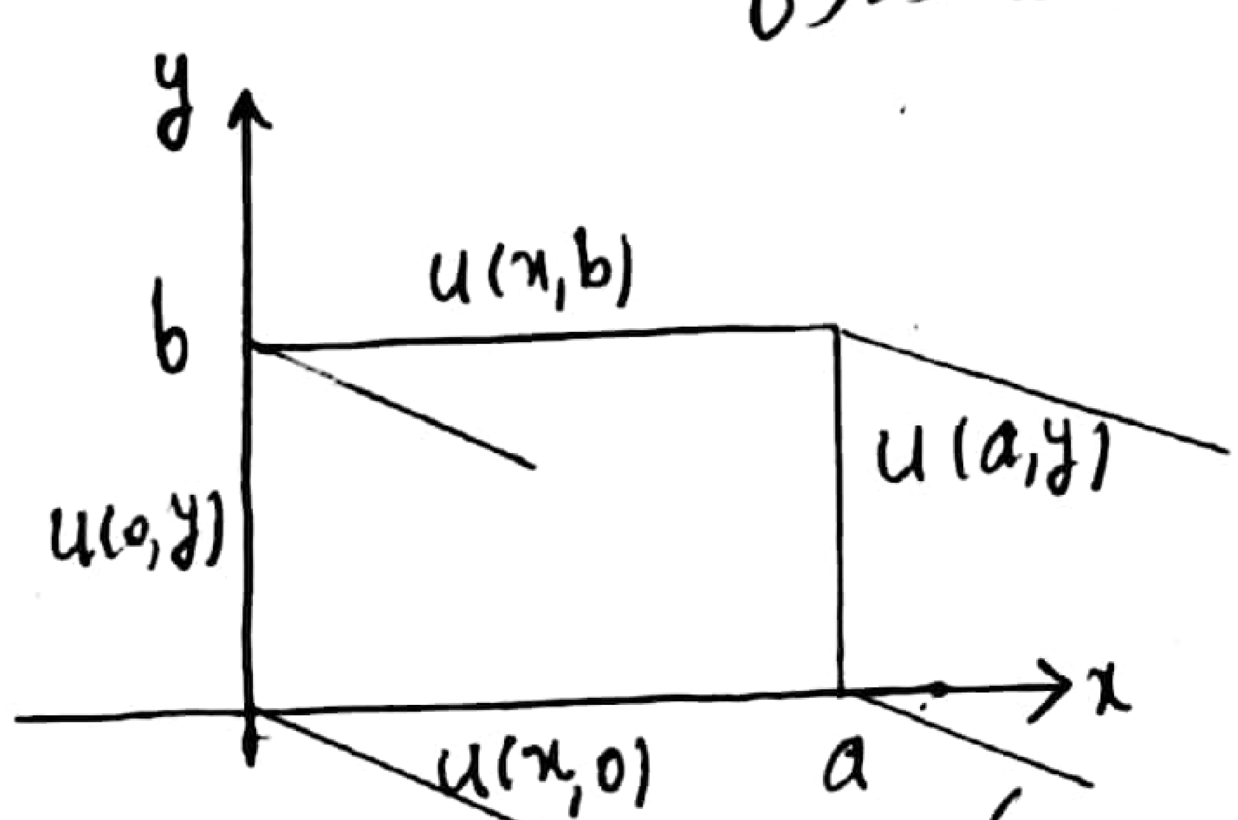


$$u_{xx}=0$$

$$\Rightarrow u = Ax+B$$

که در آن A و B با توجه به شرایط تعیین می‌شوند.

3-5 حل معادله لاپلاس دو بعدی در دستگاه مختصات دکارتی



این حالت را می‌توان مانند یک کانال کوری در نظر گرفت که در راستای محور z تا بی‌نهایت ادامه دارد.

شکل کلی معادله لاپلاس دو بعدی در دستگاه مختصات دکارتی به صورت زیر است

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = h(x,y), \quad 0<x<a, \quad 0\le y\le b \qquad (2-5)$$

$$\begin{aligned} u(0,y) &= f_1(y) \\ u(a,y) &= f_2(y) \\ u(x,0) &= f_3(x) \\ u(x,b) &= f_4(x) \end{aligned} \qquad (3-5)$$

برای حل معادله (2-5) با شرایط مرزی (3-5) ابتدا با تغییر متغیر $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ $u(x,y)$ آن را به دو معادله به صورت زیر تبدیل می‌کنیم که یکی در $x=0$ و $x=a$ شرایط مرزی صفر داشته باشد و دیگری در $y=0$ و $y=b$ شرایط مرزی صفر داشته باشد.

$$v_{xx} + v_{yy} = h(x,y) \qquad (4\text{-}5)$$

$$v(0,y) = 0 \qquad (5\text{-}5)$$

$$v(a,y) = 0$$

$$v(x,0) = f_3(x)$$

$$v(x,b) = f_4(x)$$

و

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 \qquad (6\text{-}5)$$

$$w(0,y) = f_1(y)$$

$$w(a,y) = f_2(y) \qquad (7\text{-}5)$$

$$w(x,0) = 0$$

$$w(x,b) = 0$$

همان طور که ملاحظه می‌شود مجموع معادلات فوق، همان معادله (2-5) با شرایط تکمیلی (3-5) است. بنابراین اگر جواب عمومی معادلات (4-5) و (6-5) را بدست آوریم، جواب عمومی معادله (2-5) نیز مشخص می‌شود.

برای حل معادله (4-5)، تابع $v(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F(y) \times \text{تابع ویژه} \qquad (8\text{-}5)$$

با توجه به اینکه $v(0,y)=0$ و $v(a,y)=0$، تابع ویژه به صورت $\sin(\lambda x)$ و $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ است.

اگر $F(y)$ مشخص شود آن گاه جواب عمومی معادله $(4\text{-}S)$ مشخص می شود. لذا $v(x,y)$ را در $(4\text{-}S)$ جایگذاری می کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(F''(y)-\lambda^2F(y)\right)\sin(\lambda x)=h(x,y)\,,\qquad \lambda=\frac{n\pi}{a},\ n=1,2,\dots$$

$$\Rightarrow F''(y)-\lambda^2F(y)=\frac{2}{a}\int_0^a h(x,y)\sin(\lambda x)\,dx=q(\lambda,y)$$

$$\Rightarrow F(y)=F_h(y)+F_p(y)$$

که در آن

$$F_h(y)=A\,ch(\lambda y)+B\,sh(\lambda y)$$

و جواب خصوصی بسته به تابع $q(\lambda,y)$ می تواند تابعی مانند $M(\lambda,y)$ باشد.

$$\Rightarrow F(y)=A\,ch(y)+B\,sh(y)+M(\lambda,y)$$

$$\Rightarrow v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A\,ch(\lambda y)+B\,sh(\lambda y)+M(\lambda,y)\right)\sin(\lambda x)\qquad(9\text{-}S)$$

با اعمال دو شرط مرزی باقی مانده در $y=0$ و $y=b$ ، ضرایب مجهول A و B بدست می آیند.

$$u(x,0)=f_3(x)=\sum_{1}^{\infty}\left(A+M(\lambda,0)\right)\sin(\lambda x)$$

$$\Rightarrow A+M(\lambda,0)=\frac{2}{a}\int_0^a f_3(x)\sin(\lambda x)\,dx\qquad(10\text{-}S)$$

$$u(x,b)=f_4(x)=\sum_{1}^{\infty}\left(A\,ch(\lambda b)+B\,sh(\lambda b)+M(\lambda,b)\right)\sin(\lambda x)$$

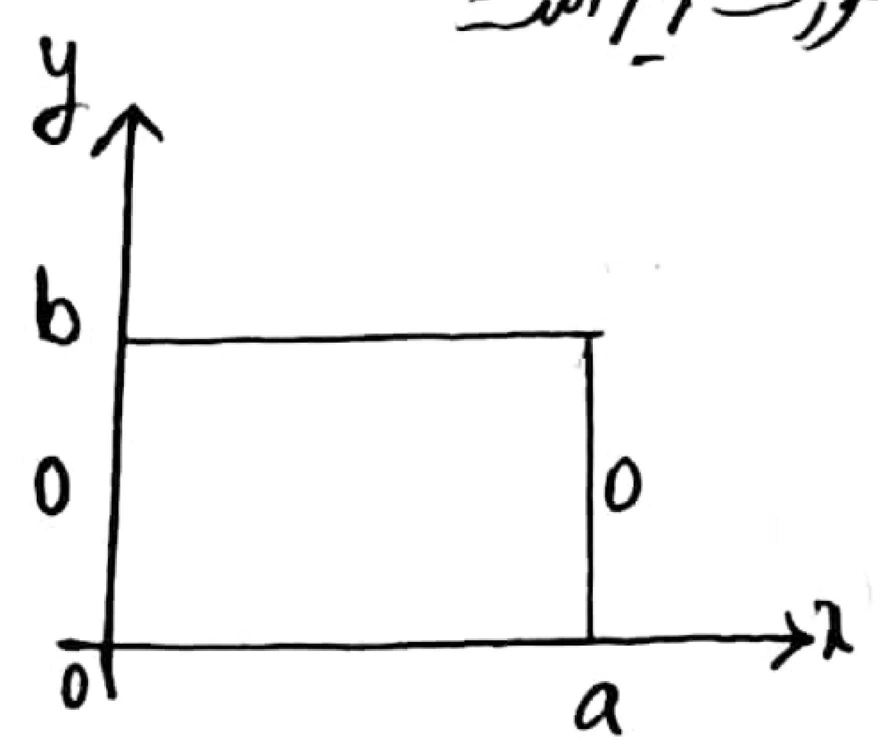
$$\Rightarrow A\,ch(\lambda b)+B\,sh(\lambda b)+M(\lambda,b)=\frac{2}{a}\int_0^a f_4(x)\sin(\lambda x)\,dx\qquad(11\text{-}S)$$

با مشخص شدن A و B، تابع $u(x,y)$ یعنی همان جواب (4-5) مشخص می‌شود.

تذکر: جواب معادله لاپلاس از دو جزء هایپربولیکی (نمایی) و مثلثاتی (تابع ویژه) تشکیل شده است. برای تشخیص اینکه هر کدام از دو جزء فوق برحسب چه متغیری باشند به صورت زیر عمل می‌کنیم:

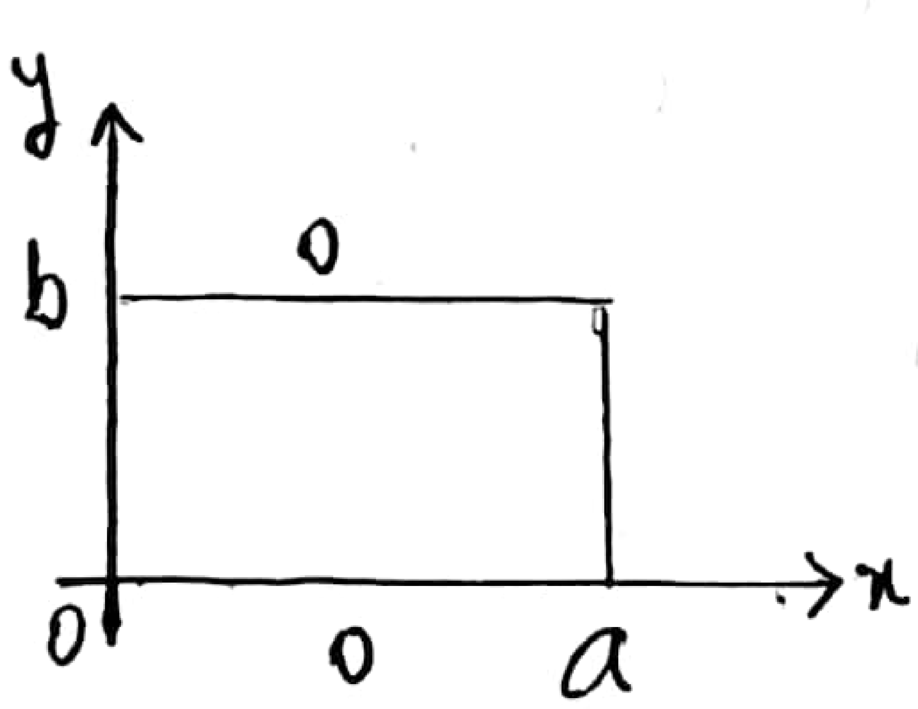
نوسان در راستای محوری است که حداقل دو شرط مرزی همگن بر آن عمود باشند.

لذا اگر شرط مرزی در $x=0$ و $x=a$ صفر باشد، تابع ویژه برحسب x (نوسان در راستای محور x هست و مثلثاتی برحسب $\sin x$ یا $\cos x$ در تابع جواب خواهیم داشت) و در نتیجه جزء هایپربولیکی برحسب y خواهد بود و شکل کلی جواب به صورت زیر است



$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} F(y)\times \text{تابع ویژه}$$

اگر شرایط مرزی در $y=0$ و $y=b$ صفر باشد، تابع ویژه برحسب y (نوسان در راستای محور y هست) و جزء هایپربولیکی برحسب x است و شکل کلی جواب به صورت زیر است



$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} F(x)\times \text{تابع ویژه}$$

برای حل (5-6)، با توجه به اینکه شرایط مرزی در $y=0$ و $y=b$ صفر است، شکل کلی جواب

به صورت زیر خواهد بود

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} F(x) \times \text{تابع ویژه} \qquad (5-11)$$

با توجه به اینکه $w(x,0)=0$ و $w(x,b)=0$، تابع ویژه به صورت $Sh(\lambda y)$ و $\lambda=\frac{n\pi}{b}$ است.

با جایگذاری $w(x,y)$ در (5-6) داریم

$$\sum_{1}^{\infty}\left(F''(x)-\lambda^2 F(x)\right)Sh(\lambda y)=0$$

$$\Rightarrow F''(x)-\lambda^2F(x)=0 \Rightarrow F(x)=A\,ch(\lambda x)+B\,Sh(\lambda x)$$

$$\Rightarrow w(x,y)=\sum_{1}^{\infty}\left(A\,ch(\lambda x)+B\,Sh(\lambda x)\right)Sin(\lambda y)\,,\quad \lambda=\frac{n\pi}{b} \qquad (5-12)$$

با اعمال شرایط مرزی باقی مانده در $x=0$ و $x=a$ داریم

$$w(0,y)=f_1(y)=\sum_{1}^{\infty} A\,Sh(\lambda y)$$

$$\Rightarrow A=\frac{2}{b}\int_0^b f_1(y)\,Sin(\lambda y)\,dy \qquad (5-13)$$

و

$$w(a,y)=f_2(y)=\sum_{1}^{\infty}\left(A\,ch(\lambda b)+B\,Sh(\lambda b)\right)Sh(\lambda y)$$

$$\Rightarrow A\,ch(\lambda b)+B\,Sh(\lambda b)=\frac{2}{b}\int_0^b f_2(y)\,Sh(\lambda y)\,dy \qquad (5-14)$$

مثال ۱. جواب معادله لاپلاس $u_{xx}+u_{yy}=0$ در کانال مستطیل شکل به ابعاد $a\times b$ با شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(0,y)=u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=u_0\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \end{cases}$$

را بیابید.

تبصره. اگر در محاسبه تابع ویژه و مقدار ویژه، ناحیه از یک سمت نامحدود باشد آن گاه مقدار ویژه به طور پیوسته می‌تواند تغییر کند و جواب $u(x,y)$ به شکل انتگرالی خواهد بود.

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}(\text{تابع ویژه})(\text{قسمت هایپربولیکی})\,d\lambda$$

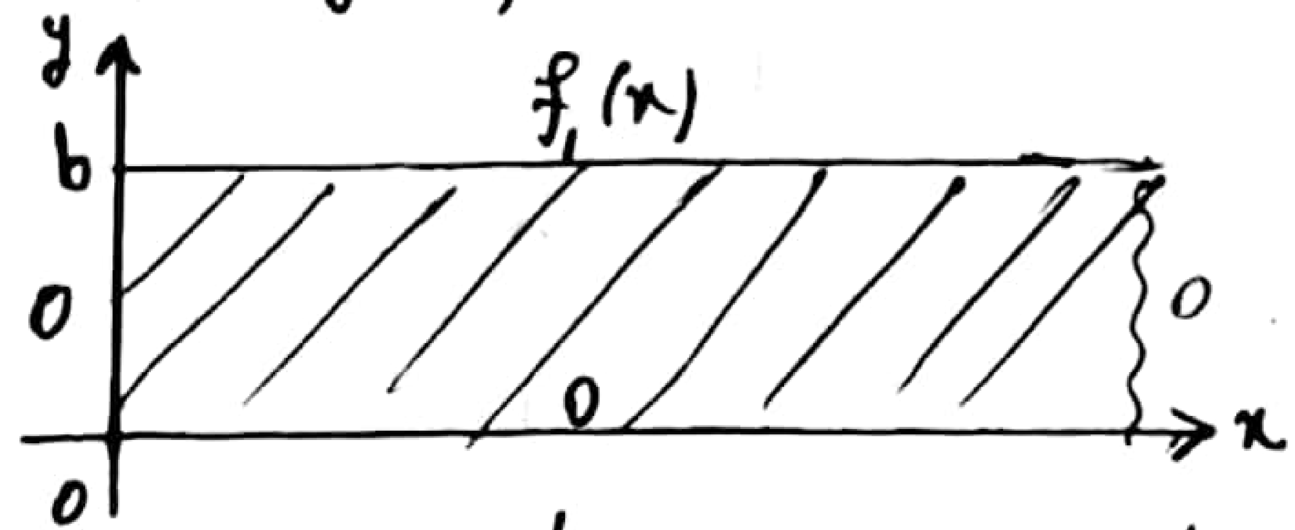
به عنوان مثال، برای مسئله

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<\infty,\quad 0\leq y\leq b,$$

$$u(x,0)=0,$$

$$u(x,b)=f(x),$$

$$u(0,y)=0,$$



($\lim u(x,y)\to 0$ as $x\to\infty$)

تابع ویژه برحسب x است.

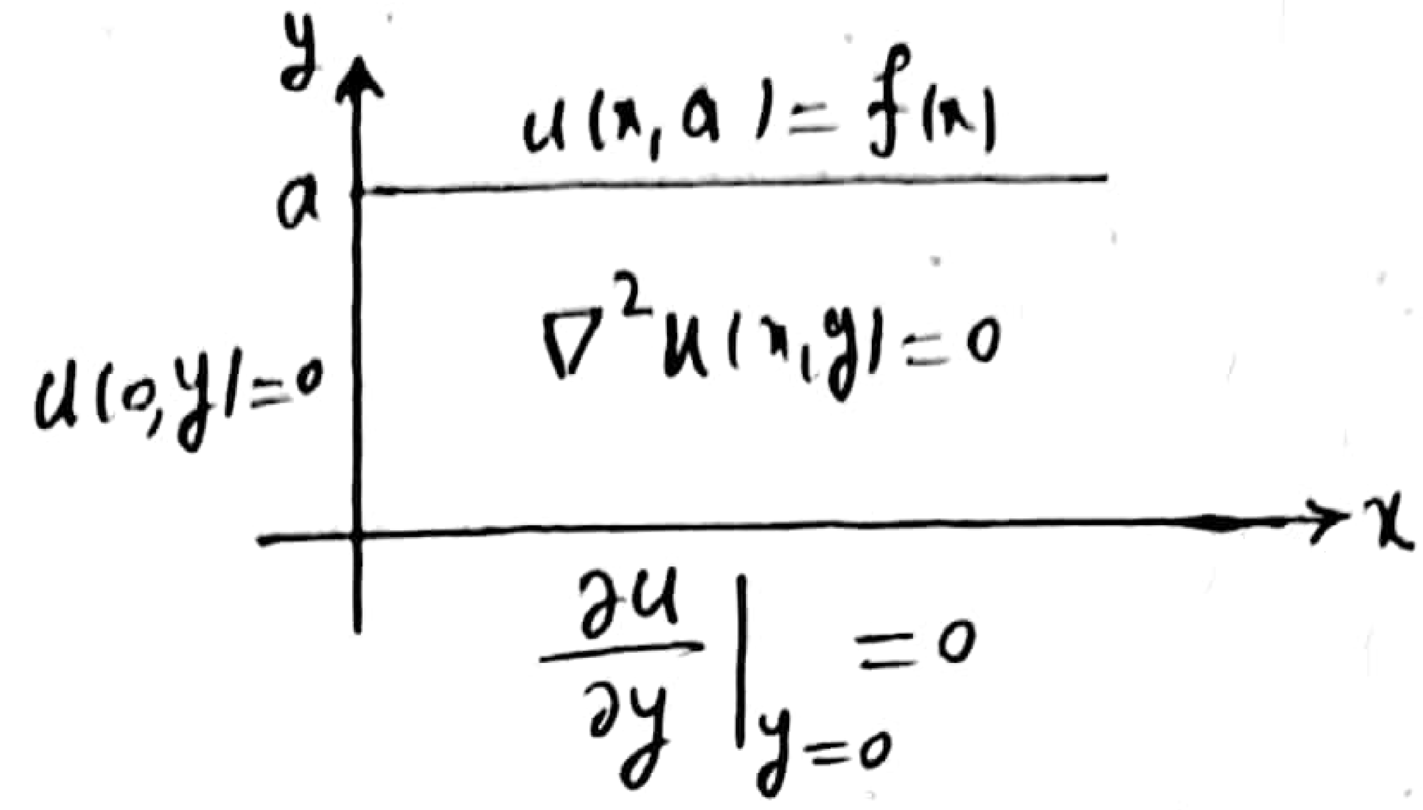
(با توجه به شکل، به وضوح شرط مکانی دیگری بر محور y ها موجود نیست. لذا نوسان در راستای محور x ها است)

$$u(x,y)=F(y)\,(A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x))$$

$$u(0,y)=0\Rightarrow A=0\Rightarrow \text{تابع ویژه}=\sin(\lambda x)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\int_0^{\infty}(A(\lambda)\operatorname{ch}(\lambda y)+B(\lambda)\operatorname{sh}(\lambda y))\sin(\lambda x)\,d\lambda$$

مثال 2. پتانسیل الکتریکی $u(x,y)$ در ناحیه نیم نوار داده شده و با شرایط مرزی مفروض را بیابید



$$u(0,y) = 0, \quad u(\infty, y) = 0 \Rightarrow$$ نوسان در راستای محور xها و در نتیجه تابع ویژه بر حسب x است

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_0^\infty \left(A(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda y) + B(\lambda)\,\mathrm{sh}(\lambda y)\right) \sin(\lambda x)\, d\lambda$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow B(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \int_0^\infty A(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda y)\,\sin(\lambda x)\, d\lambda$$

$$u(x,a) = f(x) = \int_0^\infty A(\lambda)\,\mathrm{ch}(\lambda a)\,\sin(\lambda x)\, d\lambda$$

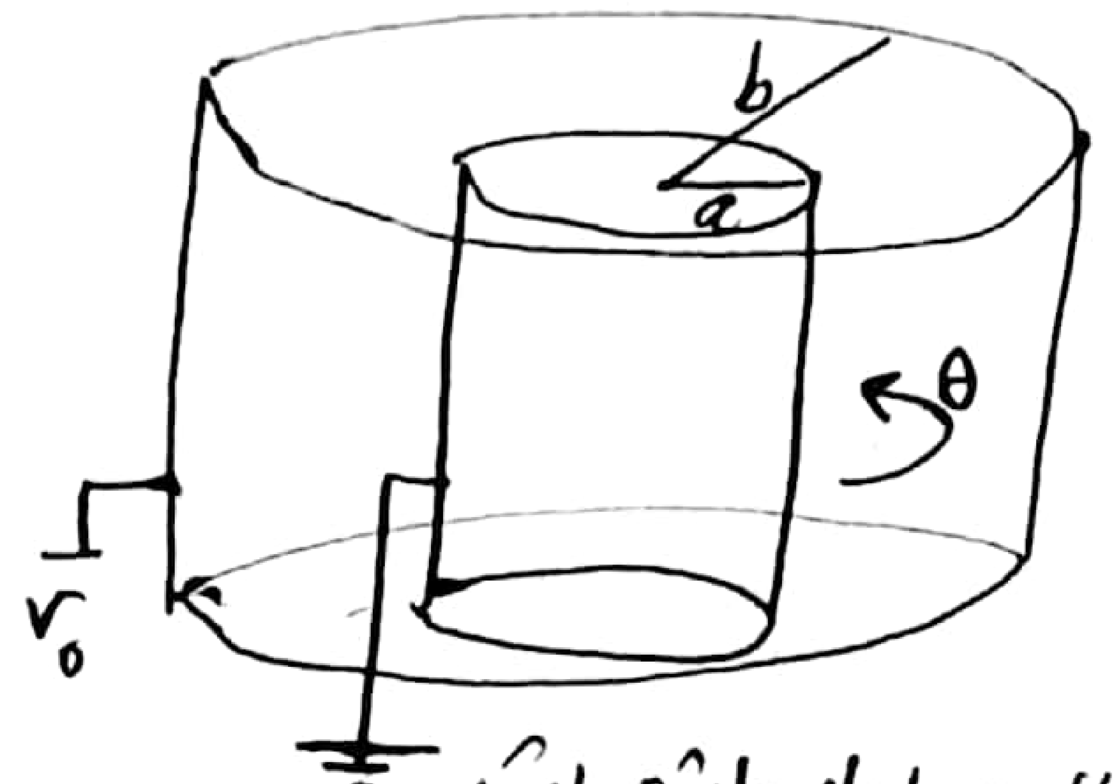
$$\Rightarrow A(\lambda) = \frac{2}{\pi\,\mathrm{ch}(\lambda a)} \int_0^\infty f(z)\,\sin(\lambda z)\, dz$$

3-5 حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای

معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است.

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0 \qquad (15-5)$$

• معادله لاپلاس یک بعدی



دو استوانه را در نظر بگیرید که تغییرات پتانسیل (اختلاف پتانسیل بین دو نقطه یکی روی استوانه داخلی و دیگری روی استوانه خارجی) برابر V_0 است.

همچنین فرض کنید استوانه‌ها در راستای محور z تا بی‌نهایت ادامه داشته باشند.

لذا معادله لاپلاس به z وابسته نیست.

از طرفی با توجه به اینکه پتانسیل روی سطح استوانه‌ها یکسان است، گردش در راستای محور θها (روی استوانه) تغییری در پتانسیل ایجاد نمی‌کند.

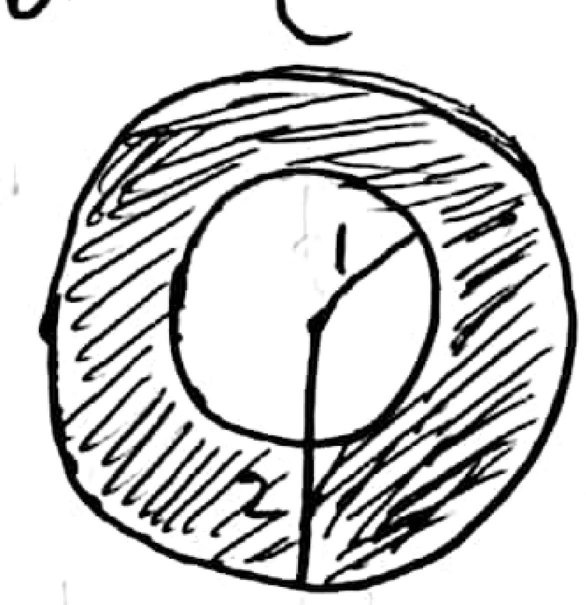
بنابراین در این حالت، پتانسیل تنها به r وابسته است، در نتیجه

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0 \implies u(r) = A + B\ln r$$

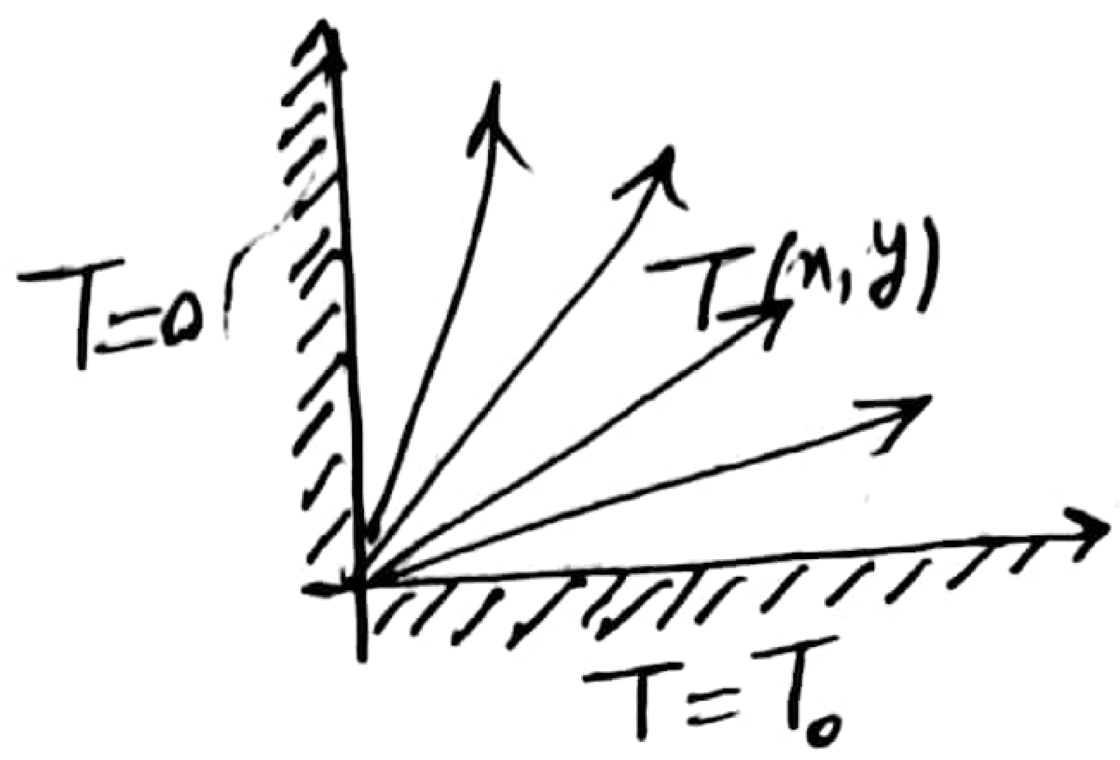
مثال 3. توزیع پتانسیل را برای ناحیه هاشورخورده با شرایط مرزی زیر محاسبه کنید.

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 < r < 2$$

$$u(1,\theta) = 3, \quad u(2,\theta) = 5$$



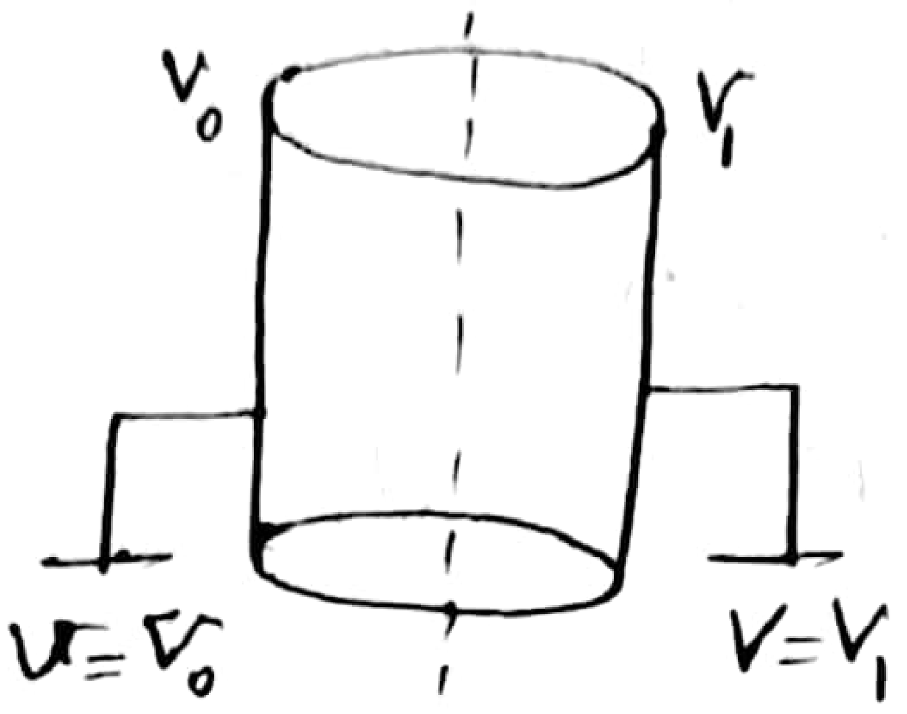
مثال 4. دمای حالت پایدار در ربع اول و با شرایط مرزی نشان داده شده است،
نشان دهید



$$T(x,y) = T_0 - \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

معادله لاپلاس دوبعدی

(حل معادله لاپلاس روی یک قرص مستدیر)



در این حالت، u فقط به r, θ وابسته است و به z وابسته نیست. می توان این حالت را شبیه یک ناودان تصور کرد.

$$\nabla^2 u = 0 \ , \quad 0 < r < a \qquad (16-5)$$

$$u(a,\theta) = g(\theta), \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi \qquad (17-5)$$

با فرض $u(r,\theta)=F(r)\,G(\theta)$ و جایگذاری در $(16-5)$ داریم

$$F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}G'' = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF} = -\frac{G''}{r^2 G} = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2F'' + rF' - kF = 0 \\ G'' + kG = 0 \end{cases}$$

فرض کنید $k=\mu^2$. در این صورت داریم

$$G'' + \mu^2 G = 0 \Rightarrow G(\theta) = A\cos(\mu\theta) + B\sin(\mu\theta) \qquad (18-5)$$

چون با چرخش در راستای θ از $\theta=0$ تا $\theta=2\pi$ به یک نقطه از نظر فیزیکی می‌رسیم (در واقع مرز دایره کامل است، $u(r,0)=u(r,2\pi)$ یا $u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi)$) لذا مسأله را با متناوب کردن در راستای θ باید حل کرد. از طرفی دوره تناوب cos و sin بایستی 2π باشد. لذا μ را یک عدد صحیح اختیار می‌کنیم. بنابراین $(18-5)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G(\theta) = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta), \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (19-5)$$

همچنین

$$r^2F'' + rF' - n^2F = 0$$

$$\Rightarrow \quad F(r) = Cr^n + Dr^{-n} \qquad (20\text{-}S)$$

با توجه به (19-S) و (20-S) داریم

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)\left(Cr^n + Dr^{-n}\right) \qquad (21\text{-}S)$$

فرض کنید $k=0$. در این صورت داریم

$$F(r) = C\ln r + D \qquad (22\text{-}S)$$

$$G(\theta) = A\theta + B$$

برازای $k=-\mu^2$ نیز جواب های حاصل قابل قبول نیستند. با توجه به (21-S) و (22-S) داریم

$$u(r,\theta) = (A\theta + B)(C\ln r + D) + \sum_{1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)\left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)$$

(23-S)

فرض کنید بخواهیم پتانسیل را در نقاط درونی دایره بدست آوریم. در این صورت داریم

$$u(r,\theta) = B^* + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) r^n, \qquad (24\text{-}S)$$

که در آن

$$B^* = BD, \quad a_n = A_n C_n, \quad b_n = B_n C_n$$

با توجه به اینکه $r=0$ در درون ناحیه فوق قرار دارد لذا $C=0$ (u باید کراندار باشد)

همچنین به طور مشابه باید داشته باشیم ($|u(r,\theta)| < \infty$ as $\theta \to \infty$)

$$A = 0$$

$$D_n = 0$$

برای محاسبه ضرایب سری (24-5) با توجه به شرط مرزی $U(a,\theta)=g(\theta)$ داریم

$$g(\theta) = B^* + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) a^n,$$

$$B^* = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} g(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta, \quad \text{و}$$

$$a^n a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \quad \text{و}$$

$$a^n b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

فرض کنید بخواهیم پتانسیل را در بیرون ناودان بدست آوریم، در این صورت داریم

$$A=0 \quad (u(r,\theta)<\infty \text{ as } \theta\to\infty)$$

$$C=0 \quad (\ln r\to\infty \text{ as } r\to\infty)$$

$$C_n=0 \quad (r^n\to\infty \text{ as } r\to\infty)$$

لذا

$$u(r,\theta) = B^* + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right) r^{-n} \qquad (25\text{-}5)$$

که در آن

$$B^* = BD, \quad a_n = A_n D_n, \quad b_n = B_n D_n$$

همچنین داریم

$$u(a,\theta) = g(\theta) = B^* + \sum_{1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right) a^{-n},$$

$$B^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta,$$

$$a^{-n}a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta, \quad a^{-n}b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$$

همچنین پتانسیل در ناحیه بین دو دایره به مرکز مبدأ و شعاع های a و b عبارت است از

$$\begin{cases}\nabla^2 u = 0, & a<r<b \\ u(a,\theta)=g(\theta) \\ u(b,\theta)=h(\theta)\end{cases}$$

$$u(r,\theta) = (\cancelto{0}{A}\theta+B)(C\ln r+D)+\sum_{1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))(C_n r^n+D_n r^{-n})$$

$|u|<\infty$ (26-5)

$$= a_0+b_0\ln r+\sum_{1}^{\infty}(a_n r^n+b_n r^{-n})(c_n\cos(n\theta)+d_n\sin(n\theta))$$

در حالت های فوق اگر به جای یک دیسک کامل دایره یک قطاع داشته باشیم یعنی $0<\theta<\alpha$ که

آن گاه شرط مرزی در $\theta=0$ ($u_\theta(r,0)$ یا $u(r,0)$) تابع ویژه و

شرط مرزی در $\theta=\alpha$ مقدار ویژه را نتیجه می دهند.

برای محاسبه تابع ویژه کافی است $u(r,\theta)=f(r)(A\cos(\lambda\theta)+B\sin(\lambda\theta))$ در نظر بگیریم و شرایط در $\theta=0$ و $\theta=\alpha$ را اعمال کنیم.

شکل کلی جواب در حالت قطاع به صورت زیر است

$$u(r,\theta)=a_0+b_0\ln r+\sum(Ar^{\lambda}+Br^{-\lambda})(\text{تابع ویژه})$$

(27-5)

مثال 5. پتانسیل الکترواستاتیک بر روی نیم دایره‌های بالایی و پایینی یک دایره به مرکز مبدأ و شعاع واحد به ترتیب 0 و 1 است. اگر پتانسیل نقاط درون دایره برابر

$$u(r,\theta) = \sum_{1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right) r^n, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \; 0 \leq \theta \leqslant 2\pi$$

باشد. مطلوبست محاسبه ضرایب A_n و B_n.

4-5 حل معادله لاپلاس در مختصات کروی

اگر φ زاویه با محور zها، θ زاویه با محور xها و ρ فاصله از مبدأ باشد آنگاه معادله لاپلاس در دستگاه مختصات کروی بصورت زیر است.

$$\nabla^2 u = (\rho^2 u_\rho)_\rho + \frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi\, u_\varphi)_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi} u_{\theta\theta} = 0 \qquad (28-5)$$

$$u(a,\theta,\varphi) = g(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi \qquad (29-5)$$

شکل باز شده معادله لاپلاس در مختصات کروی به صورت زیر است

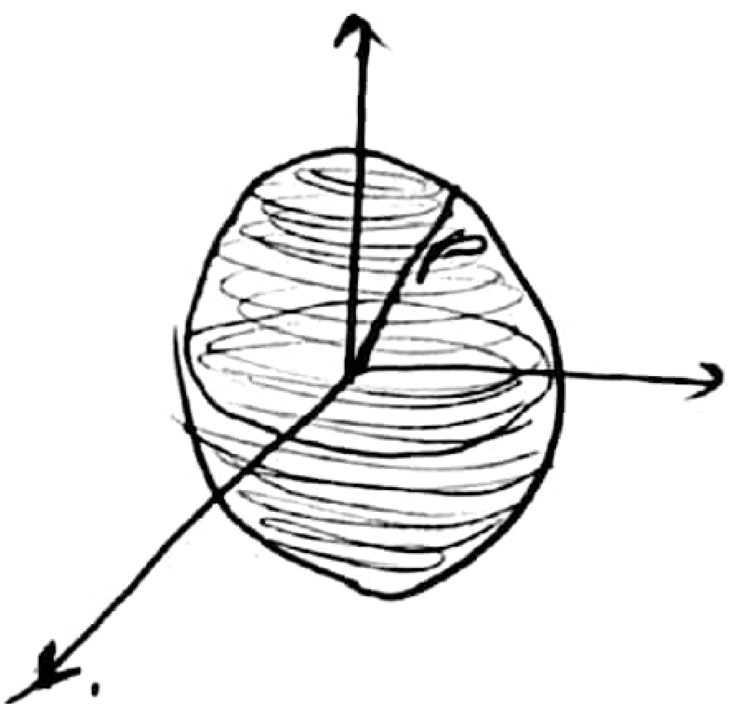
$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} + \cot\varphi\, u_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi} u_{\theta\theta} = 0$$

در این بخش به بررسی یک مساله مقدار مرزی ها بپردازیم. فرض کنید کره که به شعاع a در توزیع پتانسیل الکتریکی ثابت (29-5) قرار داشته باشد به طوری که مرکز این کره بر مبدأ مختصات منطبق باشد و $f(\varphi)$ تابعی مشخص باشد.

چون پتانسیل روی کره مستقل از θ است لذا پتانسیل در فضا نیز چنین است.

بنابراین $u_{\theta\theta}=0$. لذا

$$(\rho^2 u_\rho)_\rho + \frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi\, u_\varphi)_\varphi = 0$$

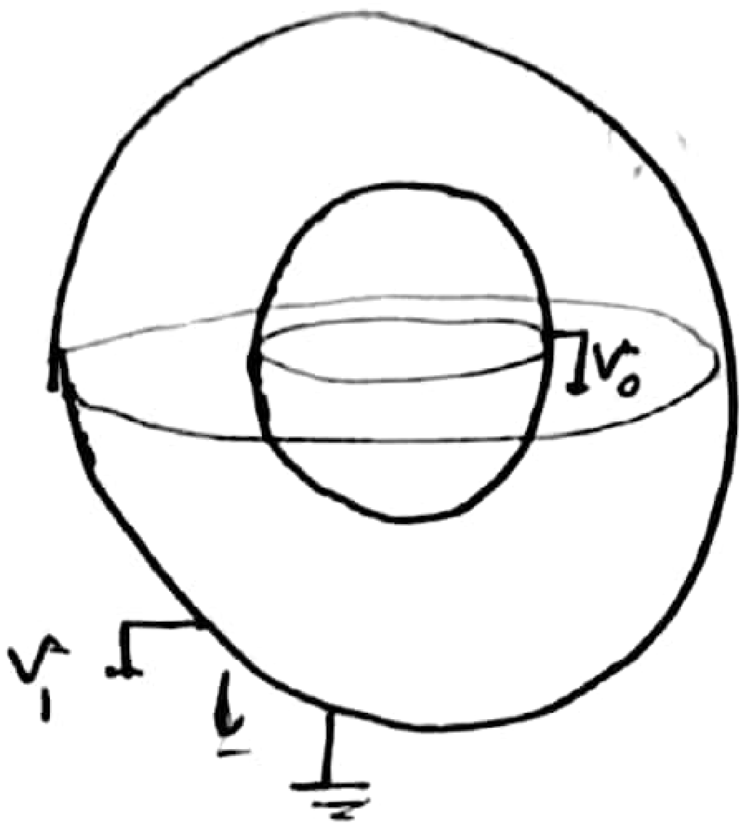


علاوه بر این، فرض کنید

$$\lim_{\rho\to\infty} u(\rho,\varphi) = 0 \qquad (30-5)$$

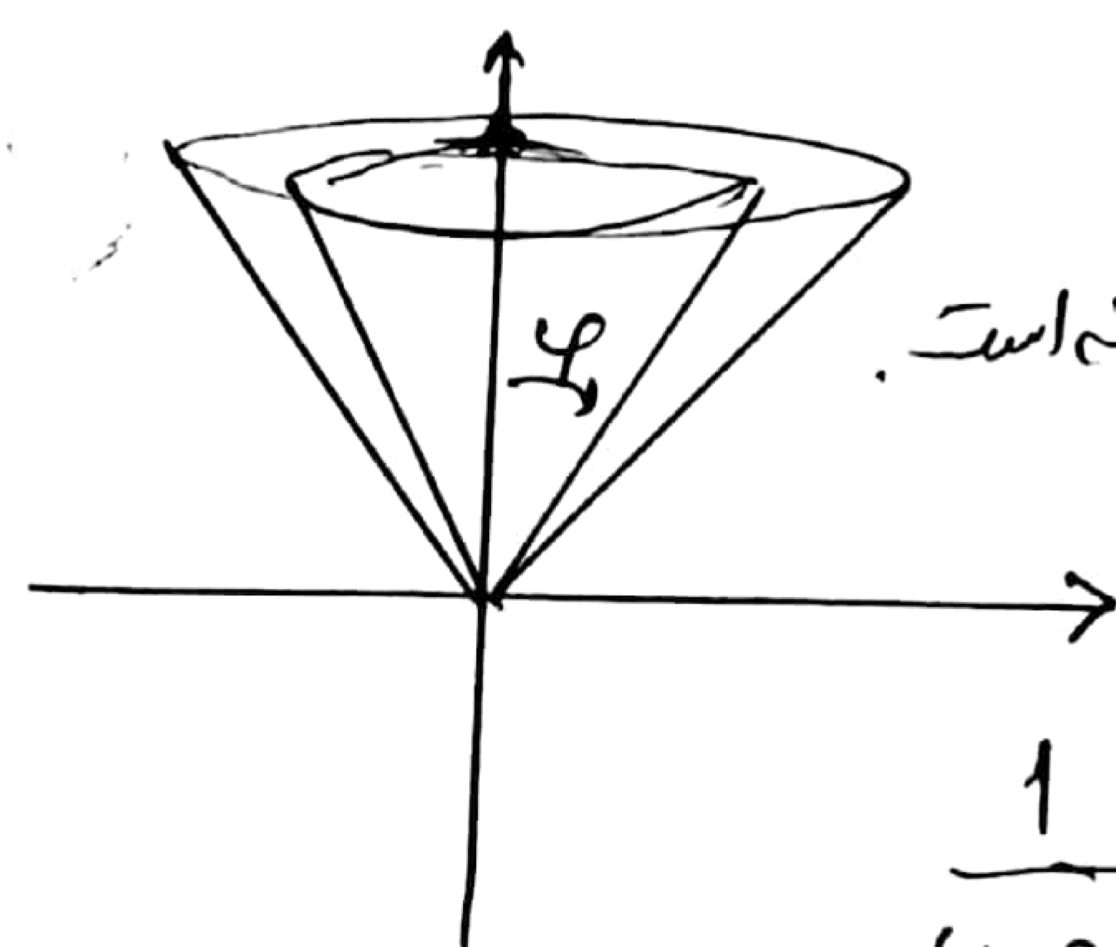
هدف حل معادله لاپلاس (28-5) با شرایط مرزی (29-5) و (30-5) است.

• معادله لاپلاس یک بعدی در مختصات کروی



در این حالت ~~پتانسیل~~ تغییرات به φ و θ وابسته نیست. لذا u فقط تابعی از ρ است.

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho}\right)=0$$



در این حالت نیز u تنها به φ وابسته است. لذا

$$\frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)=0$$

• حل معادله لاپلاس در داخل کره

برای بدست آوردن جواب از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم. فرض کنید

$$u(\rho,\varphi)=F(\rho)G(\varphi)$$

با جایگذاری $u(\rho,\varphi)$ در (28-5) داریم

$$\rho^2 F'' G + 2\rho F' G + F G'' + \cot\varphi\, F G' = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 \frac{F''}{F} + 2\rho \frac{F'}{F} + \frac{G''}{G} + \cot\varphi \frac{G'}{G} = 0$$

$$\Rightarrow \rho^2 \frac{F''}{F} + 2\rho \frac{F'}{F} = -\left(\frac{G''}{G} + \cot\varphi \frac{G'}{G}\right) = k$$

$$\Rightarrow G'' + \cot\varphi\, G' + k\, G = 0$$

فرض کنید $w=\cos\varphi$. در این صورت داریم

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial G}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \dfrac{\partial G}{\partial w} \\ \dfrac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} = \sin^2\varphi \dfrac{\partial^2 G}{\partial w^2} - \cos\varphi \dfrac{\partial G}{\partial w} \end{cases}$$

$$\sin^2\varphi\, G'' - \cos\varphi\, G' + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(-\sin\varphi)G' + kG = 0$$

$$(1-w^2)G'' - 2wG' + kG = 0 \;,\; k = n(n+1)$$

$$\Rightarrow (1-w^2)G'' - 2wG' + n(n+1)G = 0$$ (معادله لژاندر)

$$\Rightarrow G = A P_n(w) = A P_n(\cos\varphi)$$

$$\rho^2 F'' + 2\rho F' - n(n+1)F = 0 \Rightarrow F(\rho) = B_1\rho^n + B_2\rho^{-n-1}$$

$$\Rightarrow u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\rho^n + B_n\rho^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\varphi) \qquad (31-5)$$

که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر است

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

جواب معادله لاپلاس برای دو حالت خارج و داخل کره به صورت زیر تبدیل می‌شود:

الف) خارج کره $(\rho > a)$

شرط کرانداری جواب : $A_n = 0$

$$\Rightarrow u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \rho^{-(n+1)} P_n(\cos\varphi)$$

ب) داخل کره $(\rho < a)$

شرط کرانداری این جواب : $B_n = 0$

$$\Rightarrow u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(\cos\varphi)$$

با اعمال شرط مرزی و استفاده از بسط لژاندر ضرایب مجهول قابل محاسبه‌اند.

تذکر. تابع $f(x)$ که در بازه $[-1,1]$ تعریف شده و شرایط دیریکله را دارا باشد می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر بسط داد

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x),$$

که در آن

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx.$$

مثال ۶. پتانسیل الکتریکی در سطح کره‌ای به شعاع a با عبارت $v_0(1-\cos\varphi)$ داده شده است که در آن v_0 ثابت بوده و φ زاویه شعاع در هر نقطه با محور z می‌باشد. پتانسیل الکتریکی در نقاط خارج کره به فاصله ρ از مرکز را بدست آورید.

$$v(a,\theta)=v_0(1-\cos\varphi)=v_0-v_0\cos\varphi=v_0P_0(\cos\varphi)-v_0P_1(\cos\varphi)$$

$$\left(P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\ \dots\right)$$

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{-(n+1)}B_nP_n(\cos\varphi)$$

$$v(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-(n+1)}B_nP_n(\cos\varphi)=v_0P_0(\cos\varphi)-v_0P_1(\cos\varphi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B_0a^{-1}=v_0\\ B_1a^{-2}=-v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_0=av_0\\ B_1=-a^2v_0\end{cases},\ B_n=0,\ n\neq 0,1$$

$$\Rightarrow u(r,\theta)=av_0\rho^{-1}P_0(\cos\varphi)-a^2v_0\rho^{-2}P_1(\cos\varphi)$$

$$=\frac{av_0}{\rho}\left(1-\frac{a}{\rho}\cos\varphi\right)$$

فصل ششم تبدیلات لاپلاس و فوریه در حل معادلات دیفرانسیل جزئی

1-6 تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

از تبدیل لاپلاس اغلب برای حل PDE های با ضرایب ثابت و شامل دو متغیر مستقل استفاده می‌شود. در این حالت، PDE مفروض به همراه شرایط اولیه و مرزی آن نسبت به یکی از متغیرهای مستقل تبدیل می‌شود (در واقع PDE به یک ODE تبدیل می‌شود).

برای بدست آوردن جواب یک PDE با استفاده از تبدیل لاپلاس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

1- تبدیل لاپلاس را نسبت به یکی از دو متغیر به کار می‌بریم. این روش منجر به یک ODE می‌شود. معادله حاصل را به کمک شرایط اولیه و مرزی داده شده حل می‌کنیم.

2- با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس، جواب مسئله بدست می‌آید.

مثال ۱. با استفاده از تبدیل لاپلاس، جواب PDE زیر را بیابید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$u(x,0) = 0$$

$$u(0,t) = t, \quad t \geq 0$$

مثال 2. تغییر مکان $w(x,t)$ یک نخ کشسان با شرایط زیر را بیابید.

نخ بر محور x از $x=0$ تا $x=\infty$ قرار دارد.

در هر لحظه $t>0$ معادله حرکت انتهای چپ نخ عبارت است از

$$w(0,t)=f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0<t<2\pi \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

همچنین

$$\lim_{x\to\infty} w(x,t)=0, \quad t\geq 0$$

2-6 تبدیلات فوریه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی

هرگاه دادەهای مرزی یا اولیه مسأله برشیه مثبت محور مفروض باشند آن گاه در حل مسایل از تبدیلات سینوسی یا کسینوسی فوریه استفاده می‌کنیم. چنانچه داده‌ها سراسر محور مفروض باشند می‌توان از تبدیلات فوریه برای حل استفاده کرد.

مثال 3. دمای $u(x,t)$ میله همگن با سطح مقطع ثابت به طور کامل عایق پوشش شده که در فاصله $-\infty$ تا ∞ بر محور xها قرار دارد را طوری بیابید که دمای اولیه میله به صورت زیر باشد

$$u(x,0)=f(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

و چنانچه $|x|\to\infty$، به ازای هر $t\geq 0$ داشته باشیم

$$u(x,t)\to 0, \quad u_x(x,t)\to 0.$$

دمای میله را در حالت خاص

$$f(x)=\begin{cases} U_0, & |x|<1 \\ 0, & \text{o.w} \end{cases}$$

که در آن U_0 یک مقدار ثابت است بیابید.

مثال 4. درجه حرارت در یک میله نامتناهی را در صورتی بیابید که

$$u(x,0)=f(x), \quad 0<x<\infty,$$

و

$$u(0,t)=0, \quad t\geq 0,$$

همچنین

$$u(x,t)\to 0, \quad u_x(x,t)\to 0 \quad \text{as } |x|\to\infty$$

مثال 5. معادله موج $u_{tt}=c^2u_{xx}, \ -\infty<x<\infty, t>0$ را طوری حل کنید که شرایط زیر حاکم باشد

$$u(x,0)=f(x),$$
$$u_t(x,0)=0,$$
$$u(x,t)\to 0, \quad u_x(x,t)\to 0 \quad \text{as } |x|\to\infty.$$

مثال ۵۵. توزیع دما در یک میله محدود به طول π را با توجه به اطلاعات داده شده بیابید.

$$u_t = u_{xx} + x \,, \quad 0 < x < \pi \,, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0 \,, \quad u_x(\pi, t) = 0 \,, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = x + 1 \,, \quad 0 \leq x \leq \pi$$