



تمرینات درس مبانی آنالیز عددی- رشته علوم کامپیوتر
سری اول: خطا

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۸/۱۶

مدرّس: حسینی

(۱) الف) تقریبی برای $f(h)$ که در آن

$$f(h) = \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h},$$

به ازای $h = 0.00351$ را در ماشینی که از روش گردکردن و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

(ب) مقدار این تقریب را در ماشینی که از روش برشی و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

توجه شود:

$$\sin(1/0.03) = 0.843088\dots, \quad \sin(1/0.04) = 0.843625\dots, \quad \sin(1) = 0.841470\dots$$

(۲) تابع

$$f(x) = \frac{(\sin x - e^x) + 1}{x^2}, \quad x \neq 0,$$

را در نظر بگیرید که در آن آرگومان سینوس بر حسب رادیان است.

الف) تقریبی برای $f(0.123)$ را در ماشینی که از روش برشی و حساب چهار رقمی استفاده می‌کند، به دست آورید.

(ب) با استفاده از چندجمله‌ای مک لورن توابع سینوس و نمایی، یک تقریب درجه دوم برای $f(x)$ به دست آورید. سپس، با استفاده از آن مقدار $f(0.123)$ را محاسبه کنید.

(۳) توابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(x) = 1 - \tan x, \quad g(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x (1 + \tan x)}$$

الف) نشان دهید $f(x) = g(x)$.

(ب) وقتی x نزدیک $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{5\pi}{4}$ است، از کدام تابع باید استفاده شود؟ چرا؟

(پ) وقتی x نزدیک $\frac{3\pi}{4}$ یا $\frac{7\pi}{4}$ است، از کدام تابع باید استفاده شود؟ چرا؟

(۴) فرض کنید کامپیوتری در اختیار دارید که تنها قادر به ذخیره اعداد بین -10^6 و 10^6 است. به عبارت دیگر، اگر مقادیر محاسبه شده بیشتر از این اعداد باشند، خطای سرریز ظاهر می‌شود. مشکلات محاسبه مقدار واریانس اعداد $x_1 = 10^4 - 1$ ، $x_2 = 10^4 + 1$ و $x_3 = 10^4 + 1$ با استفاده از فرمول

$$v = \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) - \mu^2, \quad \mu = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i,$$

در این کامپیوتر را بیان کنید. فرمول بالا را طوری بازنویسی کنید که مقدار واریانس این اعداد در این کامپیوتر قابل محاسبه باشد.

(۵) عدد حالت نسبی مساله زیر را بیابید. به ازای چه مقادیری از x مساله بدحالت است؟

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

توجه شود:

$$e^x - e^{-x} = 2 \sinh x$$

(۶) چرا محاسبه مقدار انتگرال

$$I(N) = \int_N^{N+1} \frac{dx}{1+x^2},$$

با استفاده از رابطه

$$I(N) = \arctan(N+1) - \arctan(N),$$

به ازای $N = 10^8$ ، از نظر عددی ناپایدار است. برای رفع مشکل، چه راهکاری را پیشنهاد می‌کنید. جواب خود را به طور کامل تشریح کنید.

«موفق باشید»