

به نام خدا



تمرینات درس معادلات دیفرانسیل جزئی- رشته ریاضیات و کاربردها
سری اول- سری فوریه

مدرس: حسینی

مهلت تحویل: ۱۴۰۳/۰۸/۲۱

(۱) الف) فرض کنید تابع f در یک دوره تناوب به صورت $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$, $0 < x < 1$ تعریف شود. آیا تابع f دارای سری فوریه است؟ چرا؟

(ب) در بسط فوریه $f(x) = xe^{-x} \sin x$, $0 < x < \pi$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ را بیابید.

(۲) سری فوریه توابع زیر را بیابید.

الف) $y = x - [x]$

ب) $y = x + \sin x$, $-\pi < x < \pi$

پ) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{4}, & -\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi(\pi-x)}{4}, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4}, \end{cases}$ و $f(x+\pi) = f(x)$

(۳) با استفاده از بسط سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 3, \end{cases}$ مقدار سری فوریه را در نقاط $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$, $x = \frac{912}{5}$ و $x = -232$ بیابید.

(۴) فرض کنید

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{\pi} \right],$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \left[\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{\pi}^{\pi} \right],$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = e^{-in\pi} - e^{in\pi}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{i}{n} \left[e^{-inx} \Big|_{\pi}^{\pi} - e^{inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right],$$

که در آن n یک عدد صحیح است. مطلوبست محاسبه هر یک از موارد زیر

الف) سری فوریه حقیقی تابع f .

(ب) سری فوریه مختلط تابع g .

(پ) نمایش حقیقی سری فوریه تابع g .

(۵) ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = -\pi, 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید به ازای هر $-\pi < x < \pi$ داریم

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n},$$

و نتیجه بگیرید اگر $0 < x < \pi$ ، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2} = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{6}.$$

«موفق باشید»